О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Мамедов Эльчин Муса оглы
кандидат физ-мат. наук, доцент. Ведущий научный сотрудник Института Математики и Механики. (Азербайджан)
У.Ш.Абдурахмонов
преподаватель Кокандского Государственного Педагогического Института.(Узбекистан)

Аннотация: *Настоящая работа посвящена краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной сфере. В статье поднимается и применяется один вопрос. Рассмотрены все случаи треугольной сферы. Одна теорема представлена с доказательством.*

Ключевые слова: *треугольник, сфера, парабола, уравнение гиперболы, краевая задача, функция, дифференциал, дифференциальное уравнение.*

В настоящем сообщении ставится одна краевая задача для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in D_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in D_i,\ i=2,3;\end{cases}$ G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0, а $a_2,b_2\in R$, $\gamma_2=\frac{b_2}{a_2}$, причем $1<\gamma_2<+\infty$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>**Задача-1.**</u> Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (2) \qquad u(-1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (3)$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (4) \qquad u_{xx}(-1,y)=\varphi_4(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (5)$$

$u|_{BC} = \psi_1(x),\ 0 \le x \le 1;$ (6) $u|_{DF} = \psi_2(x),\ -1 \le x \le -\frac{1}{2};$ (7)

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x),\ 0 \le x \le 1;$ (8) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4(x),\ -1 \le x \le 0;$ (9)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DC} = \psi_5(x),\ -1 \le x \le 0; \quad (10)$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x),\ -1 \le x \le 1;$ (11) $u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x),\ -1 \le x \le 1;$ (12)

$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x),\ -1 \le x \le 1;$ (13) $u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_3(y),\ 0 \le y \le 1;$ (14)

$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_3(y),\ 0 \le y \le 1;$ (15) $u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_3(y),\ 0 \le y \le 1;$ (16)

$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta_3(y),\ 0 \le y \le 1, \quad (17)$$

где

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x),\ \textit{если}\ \ 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x),\ \textit{если}\ \ -1 \le x \le 0; \end{cases} \quad N(x) = \begin{cases} \nu_1(x),\ \textit{если}\ \ 0 \le x \le 1, \\ \nu_2(x),\ \textit{если}\ \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x),\ \textit{если}\ \ 0 \le x \le 1, \\ \mu_2(x),\ \textit{если}\ \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$ $\varphi_i\ \left(i = \overline{1,4}\right),\ \psi_j\ \left(j = \overline{1,5}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\tau_i, \nu_i, \mu_i\ (i = \overline{1,3})$, θ_3 – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 1$, а $F(-1/2, -1/2)$.

В этом сообщении даем краткую идею решения поставленной задачи.

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_3 \in C^3[0,1]$, $\varphi_4 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_5 \in C^2[-1,0]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi_4'(0) = -\psi_3'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Теорема доказывается методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{12}(y),\ (x,y) \in G_1, \quad (18)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{i2}(y),\ (x,y) \in G_i \quad (i = 2,3), \quad (19)$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y),\ (x,y) \in G_i\ \left(i = \overline{1,3}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(b_2 x - a_2 y), \omega_{i2}(y)\ \left(i = \overline{1,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование проводится сначала в области G_2. Записывая решение уравнения (19) $(i = 2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и удовлетворяя условия (8) и (9) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}((b_2 - a_2)x + a_2) + \omega_{22}(x-1) = -\sqrt{2}\psi_3'(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (20)$$

$$\omega_{21}\left(\left(b_2+a_2\right)x+a_2\right)+\omega_{22}\left(-x-1\right)=\sqrt{2}\psi_4'\left(x\right),\ -1\le x\le 0\,. \qquad (21)$$

Затем подставляя это общее решение в условие (10), после некоторых выкладок, получим

$$\left(b_2-a_2\right)\omega_{21}'\left(\left(b_2+a_2\right)x+a_2\right)+\omega_{22}'\left(-1-x\right)=2\psi_5'\left(x\right),\ -1\le x\le 0\,. \qquad (22)$$

Исключая из (21) и (22) функцию $\omega_{22}\left(-x-1\right)$, находим функцию $\omega_{21}\left(\left(b_2+a_2\right)x+a_2\right)$. Тогда из (21) определяем и функцию $\omega_{22}\left(-x-1\right)$ в промежутке $-1\le x\le 0$.

В функции $\omega_{21}\left(\left(b_2+a_2\right)x+a_2\right)$ меняя аргумент $\left(b_2+a_2\right)x+a_2$ на b_2x-a_2y, а а в функции $\omega_{22}\left(-x-1\right)$ – аргумент $-1-x$ на y, затем слагая их, находим функцию $\omega_{21}\left(b_2x-a_2y\right)+\omega_{22}\left(y\right)$.

В функции $\omega_{22}\left(y\right)$ полагая $y=x-1$ и подставляя полученное равенство в (20), находим функцию $\omega_{22}\left(x-1\right)$ в промежутке $0\le x\le 1$.

Теперь подставляя общее решение в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T\left(x\right)$ и $N\left(x\right)$:

$$T'\left(x\right)+N\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ -1\le x\le 1, \qquad (23)$$

где $\alpha_1\left(x\right)$ – известная функция.

При $-1\le x\le 0$ уравнение (23) имеет вид

$$\tau_2'\left(x\right)+\nu_2\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ -1\le x\le 0\,. \qquad (24)$$

Далее, подставляя общее решение в (7), получим соотношение

$$\tau_2'\left(x\right)-\nu_2\left(x\right)=\delta_1\left(x\right),\ -1\le x\le 0, \qquad (25)$$

где $\delta_1\left(x\right)$ – известная функция.

Из системы (24) и (25) находим функции $\tau_2'\left(x\right)$ и $\nu_2\left(x\right)$ и тем самым – и функцию $\tau_2\left(x\right)$.

При $0\le x\le 1$ уравнение (23) имеет вид

$$\tau_1'\left(x\right)+\nu_1\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ 0\le x\le 1.$$

Теперь переходя в уравнении (19) $\left(i=2\right)$ к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1\left(x\right)$ и $\mu_1\left(x\right)$. Далее, применяя оператор $a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (18) и устремляя y к нулю, получим третье соотношение между неизвестными функциями $\tau_1\left(x\right)$, $\nu_1\left(x\right)$ и $\mu_1\left(x\right)$.

Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1\left(x\right)$ и $\mu_1\left(x\right)$ затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'\left(x\right)+\tau_1\left(x\right)=\alpha_2\left(x\right)-\frac{b_2}{b_2-a_2}\omega_{12}'\left(0\right)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)$ – известная функция. Решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)$, $\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]$, $\tau_1'(1)=\frac{1}{2}\psi_1'(1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(1)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, находим функцию $\tau_1(x)$. Тогда будет известной функция $u_2(x,y)$.

Далее, переходя в область G_3 и применяя метод продолжения, получим соотношение между следами решения на линии изменения типа $x=0$. Затем переходя в область G_1, записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2), (11), (14) и удовлетворяя краевым условиям, а также – условиям склеивания, приходим к интегральному уравнению типа Абеля относительно $\tau_3'''(y)$. Применяя обращение Абеля к этому уравнению, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3'''(y)$. Решая это уравнение, находим функцию $\tau_3''(y)$, тем самым и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. Мамажанов М., Шерматова Х.М., Мамадалиева Х.Б. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Актуальные научные исследования в современном мире. ISCIENCE.IN.UA, Переяслав-Хмельницкий, 2017, вып.2(22), стр. 148-151.

4. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник КРАУНЦ, Физ.мат. науки, 2017, №1(17), стр. 14-21.

5. Мамажанов М., Шерматова Ҳ.М., Мукадасов Х. Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.7-13.

6. Мамажанов М., Мамажонов С.М. Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.14-19.