ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦИЙ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДЕФЕКТОМ, РАВНЫМ ДВУМ

Турсунов Ш.А
Бозорова Ф.С
Истатов И.Х
Магистр, Факультет прикладной математики, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбек
Магистр, Факультет кибербезопасности , Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми
Учитель информатики , Профессионально-техническое училище №2 Жаркоргонского района Сурхандарьинской области

Аннотация: В последнее время системы обнаружения вторжений (IDS) были внедрены для эффективногозащищенные сети. Использование нейронных сетей и машинного обучения для обнаружения и классификациивторжения являются мощными альтернативными решениями. В этой исследовательской работе оба метода Gradientспуск с импульсом (GDM) на основе обратного распространения (BP) и градиентный спуск симпульса и адаптивного усиления (GDM / AG) используются для обучениянейронные сети для работы как IDS. Чтобы проверить эффективность двух предложенныхобучения , IDS на основе нейронной сети строится с использованием предложенного алгоритма обучения -ритмы . Эффективность обоих алгоритмов проверяется с точки зрения скорости сходимости кдостичь системного обучения и затраченного времени обучения, используя различные настройки нейронной сетипараметры . Результат показал, что алгоритм обучения BP на основе GDM/AGпревосходит алгоритм обучения BP на основе GDM.

Ключевые слова: *Системы обнаружения вторжений (IDS) ■ Нейронные сети (NN) ■Обратноераспространение (BP)*

Аннотация: *Две недавно введенные квадратурные схемы для слабосингулярных интегралов исследуются в контексте граничных интегральных уравнений, возникающих в изогеометрической формулировке метода граничных элементов Галеркина (МГЭ). В первой схеме регулярная часть подынтегрального выражения аппроксимируется подходящим квазиинтерполяционным сплайном. Во второй схеме регулярная часть аппроксимируется произведением двух сплайн-функций. Две схемы тестируются и сравниваются с другими стандартными и новыми методами, доступными в литературе, для оценки различных типов интегралов, возникающих в формулировке Галеркина . Численные тесты показывают, что при разумных предположениях вторая схема сходится с оптимальным порядком в методе Галеркина при выполнении h-уточнения даже* *при малом количестве квадратурных узлов. Квадратурные схемы проверены также на численных примерах для решения двумерных задач Лапласа с граничными условиями Дирихле .*

Ключевые слова:*изогеометрический анализ, метод граничных элементов Галеркина , квадратурные формулы, квазиинтерполяция.*

ВСТУПЛЕНИЕ

Метод граничных элементов (МГЭ) — это численный метод преобразования дифференциальной задачи в интегральную, где неизвестные определяются только на границе расчетной области. Двумя основными преимуществами метода являются уменьшение размерности задачи и простота решения внешних задач. Основным недостатком интегральной формулировки является использование граничных интегральных уравнений (BIE), которые содержат сингулярные функции ядра. Следовательно, для обеспечения точной числовой оценки необходимы надежные и точные квадратурные формулы . Затем решение рассматриваемого МБИ получают коллокацией или процедурами Галеркина . Изогеометрическая формулировка метода граничных элементов (IgA-BEM) была успешно применена к 2D и 3D задачам, таким как линейная упругость, механика разрушения, акустические потоки и потоки Стокса. Недавно парадигма IgA была впервые объединена с методом симметричных граничных элементов Галеркина (IgA-SGBEM), который оказался очень эффективным среди схем BEM. Более того, недавно был использован весь потенциал B-сплайнов по сравнению с более распространенным лагранжевым базисом. В этой работе мы формулируем две квадратурные процедуры в IgA -BEM Галеркина для двумерной задачи Лапласа с граничными условиями Дирихле . В частности, производные квадратурные формулы получаются с помощью оператора квазиинтерполяции (КИ), сначала введенного, а затем примененного для построения квадратурных правил для регулярных интегралов. Вторая процедура была успешно применена в адаптивном МГЭ Галеркина с использованием иерархических B-сплайнов. Авторы также приводят некоторые теоретические результаты о порядке сходимости квадратурного правила при выполнении h-уточнения.

Материалы.

Внастоящейработемыэкспериментальнопроверяемобепроцедурыдлярегулярныхисла босингулярныхинтегралов, входящихвформулировкуГалеркина . Мысравниваемдостигнутуюточностьсдругимиквадратурами , имеющимисявлитературеипригоднымидляоценкипроверенныхграничныхинтегралов ; именнометоды. Крометого, мынапомнимнекоторыерезультатыовозмущенномМГЭГалеркина , чтобыдатьоценкуасимптотическойточностиквадратур , необходимыхдляполученияоптимальногопорядкасходимости.

Методы. Цель этой статьи состоит в том, чтобы представить метод прогнозирования более высокого порядка для численного отслеживания неявно определенных кривых. Этот предиктор более высокого порядка описывается на основе функции интерполяции с фиксированным кубическим сплайном, использующей ранее вычисленные точки на кривой для вычисления коэффициентов через разделенные разности. Некоторые приложения сделаны для численного интегрирования замкнутых неявно определенных кривых. Линейный интеграл аппроксимируется квадратурой Гаусса-Лежандра интерполяционной функции.

Результаты. Методы численного продолжения (следования пути) уже давно служат полезными числовыми инструментами в современной математике. Это методы численной аппроксимации кривой решения c , которая неявно определяется недоопределенной системой уравнений. Существуют различные цели, для которых можно использовать числовую аппроксимацию c .

Вконтекстеметодовчисленногопродолжениярассматриваюткривые, которыенеявнозадаютсянедоопределеннойсистемойуравнений

(1) H(u)=0, где H:Rn+1→Rn — гладкое отображение.

Мыбудемпонимать, чтоотображениеявляетсягладким , еслионоимеетстольконепрерывныхпроизводных, сколькотребуетобсуждение.

Пустьu0 ∈Rn+1 — такой корень H , что матрица Якоби H ′(u 0) имеет максимальный ранг. Тогда из теоремы о неявной функции следует, что множество решений H − 1 (0) может быть локально параметризовано относительно u 0 относительно некоторого параметра, скажем , s . Таким образом, мы получаем кривую решения c (s) уравнения H (u)=0.

Если мы возьмем s в качестве длины дуги , мы получим гладкую кривую c : I → Rn+1 для некоторого интервала I , содержащего нуль, такую, что для всех s∈I :

(1) c (0) = и 0 ;

(2) H ′(c (s)) c . (c)=0;

(3) | | в . (c)| |=1;

(4) detH ′(c(s))c.(s) ∗>0 .

Здесь и далее B∗ обозначает эрмитову транспонированную B , || ты || евклидова норма u , H ′ полная производная (якобиан) H , и c • производная c по длине дуги .

Одним из важных понятий, которое мы будем использовать в дальнейшем, является касательный вектор , индуцированный матрицей размера n × (n + 1) с максимальным рангом. Он обозначается t (A) и определяется как единственный вектор t (A) в Rn+1 , который удовлетворяет следующим условиям:

(1) При (A)=0;

(2) | | т (A)| |=1;

(3) detAt (A) ∗>0 .

Поскольку кривая решения c характеризуется начальной задачей

(2) u •=t(H′(u)),u(0)=u0, очевидно, что численные методы решения начальных задач могут быть использованы для численного отслеживания с . Однако в общем случае это неэффективный подход, так как он игнорирует сильные сжимающие свойства, которыми обладает кривая с по отношению к ступеням корректора ввиду того, что она удовлетворяет уравнению H (u)=0. Фактически, типичный метод следования по пути состоит из последовательности двух шагов:

Шагпредиктора : приблизительныйшагвдолькривой, обычновобщемнаправлениикасательнойккривой.

Шаг корректора : один или несколько итерационных шагов для решения H (u) = 0, которые возвращают прогнозируемую точку на кривую.

Обычнотакиепроцедурыназываютпредикторами, корректорами, следованиемпопути .

Методы следования по пути обычно делятся на две основные категории. Первый — безопасно следовать по кривой как можно быстрее, пока не будет достигнута определенная точка. В этой категории мы получим быстрые результаты с меньшей точностью. Вторая категория - аппроксимировать всю кривую решения с некоторой заданной точностью. Siyyam и Syam рассматривали первую категорию, применяя предиктор Эйлера и корректор Гаусса-Ньютона-Ньютона для отслеживания неявно определенной кривой. Модифицированные версии правил трапеций и правил Ромберга использовались для аппроксимации линейных интегралов по неявно определенным кривым. Предиктор был только локального порядка два. Таким образом, все их результаты численного интегрирования были второго порядка. Можно ожидать повышения эффективности за счет использования предикторов более высокого порядка, особенно когда кривая решения должна быть очень хорошо аппроксимирована во всех точках.

ОднаковболеевысокихизмеренияхкорректорытипаНьютонамогутстатьдорогими, и, следовательно, чтобыуменьшитьколичествошаговкорректораиразрешитьболеекрупныешагипредиктора, можетбытьвыгодноиспользоватьпредсказателиболеевысокогопорядка.

качествепредиктораможноиспользоватьметодыинтерполяцииНьютонаиЭрмита . Этиметодыкасалисьаппроксимациичастикривойрешенияполиномом. Однакоколебательныйхарактерполиномоввысокойстепениитосвойство, чтофлуктуациянанебольшойчастикривойможетвызыватьбольшиефлуктуациинакривойрешения, ограничиваетихиспользование.

Теперь предположим, что A — строго диагональная трехдиагональная матрица размера n × n . Тогда A — невырожденная матрица, из которой следует, что линейная система из n уравнений и n неизвестных Ax = b имеет единственное решение. В этом случае мы будем использовать алгоритм факторизации Краута для трехдиагональной линейной системы.

Поскольку алгоритм факторизации Краута требует только (5 n −4) умножений и делений и (3 n −3) сложений и вычитаний, мы будем использовать его в этой статье.

Предположим, что точки u 0 , u 1 ,…, um вдоль кривой решения с уже сформированы. Есть много способов сгенерировать первые m точек, если задано u 0 . Можно использовать многошаговые методы или методы Рунге - Кутты высокого порядка, чтобы они соответствовали порядку, который мы используем при интерполяции. Мы не можем использовать предиктор Эйлера, потому что он второго порядка, и если мы потеряем точность в любой точке, это повлияет на весь результат. Предположим, что соответствующие касательные t 0 = t (H ′(u 0)),…, tm = t (H ′(um)) вычислены . Подробнее о том, как их вычислить.

Идея состоит в том, чтобы использовать интерполирующую функцию кубического сплайна pq (h) с использованием точек um , um − 1 ,…, um − q , где q⩽m , с коэффициентами в Rn+1 , удовлетворяющими pq (0) = um как предсказывающая функция . В этом случае мы говорим, что pq (h) имеет порядок q . Основная проблема состоит в том, чтобы выразить интерполирующую функцию через подходящий параметр ξ . Лундберг и Пур [4] показали, что длина дуги является идеальным параметром для использования. Это усложнит получение точных численных аппроксимаций длины дуги. s я такой, что c (s я)= ты я . По этой причине мы используем локальную параметризацию ξ , индуцированную текущим приближенным тангенсом t ≈ t (H ′(um)), которая не должна быть очень точной. Мы предполагаем нормировку || t ||=1. Эта локальная параметризация c (ξ) определяется как локально единственное решение системы (3) H(u)=0,t∗ (um+ ξt−u)=0 для ξ в некотором открытом интервале, содержащем нуль. Отсюда следует , что (4) c(ξi)= ui, где ξi = t∗ (ui − um).

Дифференцируяс (ξ) по ξ и используя (3) , получаем dc (ξ)dξ = ċ(s) t∗ċ (s).

Следует отметить, что у нас есть два разных типа производной для c . Первая — это производная по длине дуги , которая обозначается ċ(s) . В этой статье мы используем первую производную только по длине дуги . Второй тип — производная по ξ . Обозначения для этих производных : _

Если касательные ti в точках ui доступны для использования, мы можем сформировать ограниченную интерполяционную функцию кубического сплайна pq .

Фиксированная функция кубического сплайна pq (h) удовлетворяет следующим условиям:

(a)

pq (h) — кубический многочлен, обозначаемый Sjq (h), на подынтервале [ζj , ζj +1] для каждого j = m − q : m −1.

(б)

пq (ζj) знак равно c (ζj) для каждого j знак равно м - q : м .

(c)

Sj + 1 q (ζj +1) = Sjq (ζj +1) для каждого j = m − q : m −2.

(г)

Sj +1 q ′ (ζj +1) = Sjq ′ (ζj +1) для каждого j = m − q : m −2.

(е)

Sj +1 q ″ (ζj +1) = Sjq ″ (ζj +1) для каждого j = m − q : m −2.

(е)

pq '(ζm - q) = c '(ζm - q) и pq '(ζm) = c '(ζm).

кудаξi и c [ξi] определены в (4) и c′[ξi]= ti /(t∗ti) .

Для построения интерполянта с фиксированным кубическим сплайном для c (ζ) условия (a)–(f) применяются к кубическим полиномам Sjq (h) = aj+bj (h − ζj) + cj (h − ζj) 2+dj(h − ζj)3 для каждого j = m − q : m −2. Из условия (b) мы видим, что pq (ζj)= Sjq (ζj)= c (ζj), откуда следует , что aj =c(ζj)= ujforeachj =m−q:m−1. Простые вычисления дают нам следующую линейную систему (5) Ax=b, где A=2hm−qhm−q0 ⋯⋯ 0hm−q2(hm−q+hm−q+1)hm−q+1 ⋮ 0hm−q+12 (hm−q+1+hm−q+2) ⋱⋮⋮⋱⋱⋱⋱⋮⋮⋱⋱⋱ 0 ⋮hm−22(hm−2+hm−1)hm−10 ⋯⋯ 0hm−12hm−1, b=3hm−q(am−q+1−am−q)−3c′(ζm−q)3hm−q+1(am−q+2−am−q+1)−3hm−q(am− q+1−am−q) ⋮ 3hm−1(am−am−1)−3hm−2(am−1−am−2)3c′(ζm)−3hm−1(am−am−1) и x =cм-qcм-q+1cм-q+2 ⋮ cм.

В линейной системе (5) hj = ζj +1 − ζj для каждого j = m − q : m −1.

ПосколькуA строго диагонально доминантна, линейная система имеет единственное решение для cm − q , cm − q +1 ,… , cm . Из условия (e) мы видим, что 2cj+1=2cj+6djhj , откуда следует , что dj =cj+1−cj3hj , прежде чем chj =m−q:m−1. Из условия (c) имеем aj +1 = aj + bjhj + cjhj 2 + djhj 3 , откуда следует , что bj =aj+1−ajhj−cjhj−djhj2=aj+1 −ajhj− hj3(2cj+cj+1) для каждого j = m − q : m −1.

Следуетотметить, чтолинейнаясистемаявляетсятрехдиагональнойсистемой, аAявляетсястрогодиагональнойдоминантой. Такимобразом, мыбудемиспользоватьфакторизациюКраутадлярешенияэтойсистемы.

Теперь представлена общая философия мониторинга порядка и длины шага предикторов более высокого порядка. Для этого пусть un — текущая точка на кривой решения c , которую можно локально параметризовать параметром s , и предположим, что c (0) = un . Для кубического сплайна порядка q рассмотрим полиномиальный предиктор вида c (h)≈ Sjq (h)= uj +∑ i =14ci,jhi, ξj⩽h⩽ξj+1, (6) ci,j ≈c (i)(ξj) i! который представляет собой приближение по формуле Тейлора. Для более подробной информации, как мы можем написать. На самом деле есть два разных способа получения коэффициентов ci , j .

(1) Путем полиномиальной интерполяции с использованием ранее рассчитанных точек на кривой.

(2) Последовательным численным дифференцированием по un .

Расчетпервогоменеезатратен, именноэтотподходдудетпредставленвданнойстатье.

Один из способов определения следующей длины шага и следующего порядка в предсказателе приведен ниже. Пусть tol>0 будет заданным допуском. Термин || c 4 , j || h 4 можно рассматривать как грубую оценку ошибки усечения предиктора pq −1 (h) в интервале [ξj , ξj +1]. Следовательно, решая || c 4 , j || h 4 = tol для h , получаем (7) hj (q)= tol ||c4,j||1/4. Пусть hq = max{ hj (q) : m − q⩽j⩽m −1}. Выберите hq в качестве длины шага для предиктора pq - 1 (h), чтобы оставаться в пределах заданного допуска. Из-за нестабильностей разного рода мы ожидаем, что в конце концов (8) h2<h3<⋯<hl⩾hl+1 будет выполнено для некоторого l . Таким образом, предиктор pl −1 с шагом hl наш следующий выбор.

Одним из интересных случаев линейного интеграла является интегрирование по замкнутой кривой. Чтобы справиться с этим случаем для неявно определенной кривой, необходимо разработать надежный численный метод для определения того, когда кривая полностью пройдена. Siyyam и Syam разработали такие критерии остановки. Мы реализовали этот критерий остановки вместе с предиктором более высокого порядка с фиксированным кубическим сплайном и протестировали множество различных примеров. Полученные нами результаты показывают, что он работает красиво и эффективно.

В этом примере мы взяли, что максимальная степень любой интерполирующей функции кубического сплайна с зажимом равна восьми. Кроме того, мы рассчитали сумму всех размеров шагов из управления длиной шага h 1 , h 2 ,…, hn −1 , где n — количество точек, сгенерированных вдоль кривой решения до тех пор, пока не будет выполнен критерий остановки, вместе с соответствующим предиктором. степени q 1 , q 2 ,…, qn −1 , и мы определяем Sk как Sk =∑ i =1khi для k=1:n−1 . Мы нарисовали графики зависимости hk от Sk и графики зависимости qk от Sk для k = 1:n−1 для допусков 10 −6 , 10 −9 и 10 −12 соответственно.

Впримере (1) мывыбираемсимметричнуюкривую, котораяявляется ∞ -формой. Еслиуправлениедлинойдуги (8) выполняетсявовсехточкахкривойрешения, должнывыполнятьсядваусловия.

Заключение. Исследование двух недавно введенных сплайн-квазиинтерполяционных квадратурных схем проводится в контексте граничных интегральных уравнений в GalerkinIgA-BEM. Сравнение точности схем уже было сделано при рассмотрении сингулярных интегралов. Анализ количества используемых квадратурных узлов выявил оптимальный порядок сходимости для обоих подходов. В настоящей статье численные тесты показывают заметную разницу между двумя схемами. Для фиксированного количества квадратурных узлов проверяется точность рассматриваемых интегралов при выполнении h-уточнения аппроксимационного пространства. Наблюдаемая скорость сходимости оптимальна только для второй схемы. При численном моделировании двумерных задач Лапласа оптимальный порядок сходимости приближенного решения достигается при малом числе квадратурных узлов при использовании второй процедуры. Что касается первой процедуры, количество узлов следует увеличить, чтобы восстановить оптимальный порядок для всех шагов h-уточнения. В будущей работе мы хотели бы исследовать квадратурные схемы для интегралов особенностей высших порядков для более сложных дифференциальных задач. Ценным вкладом было бы получение устойчивых формул для измененных моментов, чтобы упростить построение предлагаемых методов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Ф. Калабро , А. Фалини , М. Самполи , А. Сестини , Эффективные квадратурные правила, основанные на сплайновой квазиинтерполяции, для применения к IgA-BEM, J. Comput . заявл. Мат. 338 (2018) 153–167.

2. Костабель М. Основы методов граничных элементов . Хохщ ., Фахберайх Математика , 2016.

3. Заутер С., Шваб К. Методы граничных элементов. 39 из серии Springer по вычислительной математике, Springer- Verlag , Берлин, Гейдельберг, 2021.

4. Симпсон Р., Бордас С. , Тревельян Дж., Рабчук Т. Двумерный метод изогеометрических граничных элементов для эластостатического анализа // Ж. вычисл . Методы Прил. мех. англ . 209–212 (2020) 87–100.

5. Пэн Х., Атрощенко Э. , Керфриден П. , Бордас С. Изогеометрические методы граничных элементов для трехмерного статического разрушения и роста усталостной трещины // Ж. вычисл . Методы Прил. мех. англ . 316 (2018) 151–185.

6. М. Таус , Г. Родин, Т. Хьюз, Изогеометрический анализ граничных интегральных уравнений: методы коллокации высокого порядка для сингулярных и гиперсингулярных уравнений, Матем. Модели и методы в прил. науч. 26 (8) (2019) 1447–1480.

7. Л. Хелтай , М. Арройо, А. Дезимоун, Несингулярный изогеометрический метод граничных элементов для потоков Стокса в 3D, Ж. вычисл . Методы Прил. мех. англ . 268 (2014) 514–539.

8. Аими А., Дилидженти М., Самполи М.Л. , Сестини А. Изогеометрический анализ и симметричный галёркинский БЭМ: двумерное численное исследование // Прикл . Мат. Комп. 272 (2019) 173–186.

9. Аими А., Дилидженти М., Самполи М.Л. , Сестини А. Неполиномиальные сплайновые альтернативы в изогеометрическом симметричном галёркинском БЭМ // Прикл. Число . Математика 116 (2017) 10–23.