AJRALGAN YADROLI GAMMERSHTEYN TIPIDAGI INTEGRAL OPERATORINING MUSBAT QO'ZG'ALMAS NUQTALARI

Murodullayeva Farog'at Tolib qizi
Qarshi davlat uneversiteti Matematika yo'nalishi Matematik analiz kafedrasi 2-kurs magistranti.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi T ajralgan yadroli xususiy integralli operator chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida qaraladi. Dastlab o'quvchiga qulaylik uchun ishning asosiy natijalarini bayon qilish va isbotlash uchun zarur bo'lgan Funksional analiz kursining muhim tushunchalari keltiriladi. O soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat boʻlishi ko'rsatiladi va unga mos keluvchi xos funksiyalar aniqlanadi. T operator noldan farqli yagona xos qiymatga ega bo'lishi isbotlanadi.*

Kalit so'zlar: *ajralgan yadro, xususiy integralli operator, xos qiymat va uning karraligi, xos funksiyalar.*

BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALAR

Bu bo'limda ishning asosiy natijalari o'quvchilarga yaxshi tushunarli bo'lishi uchun Funksional analiz va operatorlarning spektral nazariyasining ayrim tushunchalarini [1,2] eslatib o'tamiz. Bizga X va Y Gilbert fazolari berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

Ax = y (x EX, y EY) akslantirishga operator deyiladi.

Umuman olganda A operator X ning hamma yerida aniqlangan boʻlishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va Ax € Y bo'ladigan barcha x E X elementlar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va D(A) bilan belgilanadi, ya'ni: D(A) = (x EX: Ax mavjud va Ax € Y}.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy x,y ED(A) CX elementlar va ixtiyoriy α,ßE C kompleks sonlar uchun ax + By E D(A) munosabat o'rinli bo'lib, A(ax+ By) = aAx + BAY tenglik o'rinli boʻlsa, u holda A operatorga chiziqli operator deyiladi.

Agar A chiziqli operator qaralayotgan bo'lsa, D(A) ning chiziqli koʻpxillilik bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar x, y € D(A) boʻlsa, u holda ixtiyoriy α,ß € C lar uchun ax + By ED(A). 3-ta'rif. Bizga X Gilbert fazoning M qism to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday C0 soni topilib, barcha x EM elementlar uchun |||| ≤C tengsizlik o'rinli boʻlsa, u holda M to'plamga chegaralangan deyiladi. Operatorning chegaralanganligi tushunchasiga ta'rif beramiz.

4-ta'rif. Bizga X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A operatorning aniqlanish sohasi uchun D(A) = X tenglik o'rinli bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, u holda A operatorga chegaralangan operator deyiladi. Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

5-ta'rif A:XY chiziqli operator bo'lib, D(A) = X bo'lsin. Agar shunday C>0 soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy x E X elementlar uchun ||Ax|| ≤ C||x|| (1) tengsizlik bajarilsa, u holda A operatorga chegaralangan operator deyiladi. 6-ta'rif (1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasiga A operatoming normasi deyiladi, va u ||A|| kabi belgilanadi, ya'ni ||A||= inf C. Bu ta'rifdan ixtiyoriy x E X elementlar uchun||Ax || ≤ ||A|| + ||x|| 50 tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. 1-teorema. X Gilbert fazoni Y Gilbert fazoga chegaralangan A operatorning normasi ||A|| uchun akslantiruvchi chiziqli sup ||Ax|| sup ||4x|| ||A|| tengliklar o'rinli. 1-tasdiq. Chiziqli chegaralangan A operator uchun sup ||Ax|| sup ||Ax||| tenglik o'rinli.

X Gilbert fazoni Y Gilbert fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini L(X,Y) bilan belgilaymiz. Xususan, agar X = Y bo'lsa, u holda L(X,X) = L(X) belgilash ishlatiladi.

I-natija. Ixtiyoriy A EL(X, Y) operator va x E D(A) element, ||x|| = 1 uchun tengsizlik o'rinli.

||4x|| ≤ ||A||

Endi chiziqli operatorlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan spektr tushunchasiga to'xtalamiz. A chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chekli o'lchamli va cheksiz o'lchamli fazo bo'lgan hollarni tahlil qilamiz. Faraz qilaylik, A: C"C" chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror & soni uchun Ax=Ax tenglama nolmas x E C" yechimga ega bo'lsa, u holda 2 son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechimga esa xos vektor deyiladi. Ma'lumki, har bir A: C"C" chiziqli operatorga (a)-nxn matrisa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, agar & son A operatorning xos qiymati boʻlsa, u holda det (A) = 0 tenglik o'rinli boʻladi va aksincha, nxn matrisa determinanti det(A-21), parametr λ ning n- darajali ko'phadi bo'ladi va det (A-1) = 0 tenglama ko'pi bilan n ta haqiqiy ildizga, roppa rosa n ta kompleks ildizga ega, ya'ni A: C"C" chiziqli operator ko'pi bilan n ta haqiqiy xos qiymatga, roppa rosa n ta kompleks xos qiymatga ega. Agar à son A operatorning xos qiymati bo'lsa, u holda A-21 ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar & son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, ya'ni det(A - I) 0 boʻlsa, u holda A- Al ga teskari operator mavjud va u C fazoning hamma yerida aniqlangan bo'ladi.

2-teorema. A: C"C" chiziqli operator chegaralangandir. Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta'kidlash lozimki, chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo'lishi mumkin:

1) λ son uchun Ax = Ax tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni 2 son A operator uchun xos qiymat, bu holda A-21 ga teskari operator mavjud emas;

2) A son uchun C" fazoning hamma yerida aniqlangan (A-21)-¹ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar AEC son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, bunday λ A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o'lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi. Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1) va 2) holatlardan farqli bo'lgan uchinchi holat ham boʻladi, ya'ni:

3) (A-1) operator mavjud, ya'ni Ax = Ax tenglama faqat nol yechimga ega, lekin (A)-1 operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki Im(A-21) + X.

7-ta'rif. Agar λ E C son uchun A-21 ga teskari operator mavjud boʻlib, teskari operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, u holda λ soniga A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

R_1(A) = (A-1)-1operatorga esa A operatorning A nuqtadagi rezolventasi deyiladi. A operatorning barcha regulyar nuqtalari to'plami p(A) orqali belgilanadi.

8-ta'rif. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va (4) orqali belgilanadi.

9-ta'rif. Agar biror EC son uchun (A-1)x = 0 tenglama nolmas (x + 0) yechimga ega bo'lsa, u holda soni A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas x yechimga esa xos vektor deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, u holda A- A operatorning teskarisi mavjud emas. Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

10-ta'rif. a) A operatorning barcha xos qiymatlari to'plamiga uning nuqtali

spektri deyiladi va opp (A) bilan belgilanadi. b) Agar à son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa va Im(A - I) X, ya'ni

A-A operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich bo'lmasa, bunday A lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va qor (A) bilan belgilanadi. Endi o'z-o'ziga qo'shma operator ta'rifini keltiramiz.

Bizga H Gilbert fazosi va operator berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy x,ye elementlar uchun AEL(H), (Ax, y) = (x,A'y) tenglikni qanoatlantiruvchi A' operatorga A operatorning qo'shmasi deyiladi.

Agar A = A* bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy x, y e H elementlar uchun (Ax, y) = (x, Ay) tenglik o'rinli bo'lsa, A ga o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi. Quyidagi ikkita lemma o'z-o'ziga qo'shma operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari haqidagi tasdiqlarni ifodalaydi.

1-lemma. H kompleks Gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma boʻlgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.

2-lemma. O'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operatoming har xil qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir. xos

Endi o'z-o'ziga qo'shma operatorining regulyar qiymati va spektri haqidagi teoremalarni bayon qilamiz. 3-teorema. λ soni o'z-o'ziga qo'shma boʻlgan A operatoming regulyar qiymati bo'lishi uchun shunday musbat C soni topilib, barcha x E H larda|| A_2x |=|| Ax-λx ||≥ C || x || tengsizlik bajarilishi zarur va yetarlidir.

2-natija. A soni A o'z-o'ziga qo'shma operatorning spektriga tegishli bo'lish uchun shunday {x} ketma-ketlik topilib, || Axxn≤ Cnx, C∞o, n→ ∞o. (2) munosabat bajarilishi zarur va yetarlidir. (2) munosabatda || x = 1 deb olish mumkin. U holda

||Axπ-λx|| → 0,||x||= 1.

4-teorema. λ = a + iß (80) kompleks soni o'z-o'ziga qo'shma boʻlgan A 5-teorema. O'z-o'ziga qo'shma A operatorning spektri haqiqiy sonlar oʻqidagi operatorning regulyar qiymati boʻladi.

[m, M] kesmada yotadi, bu yerda m = inf (Ax, x), M = max (Ax, x). x=1 x=1 6-teorema. Agar A o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa, u holda m va M sonlari

A operatorning spektriga tegishli bo'ladi. 3-natija. Har qanday o'z-o'ziga qo'shma operator bo'sh bo'lmagan spektrga ega boʻladi..

Funksional fazoda (masalan, C[a,b], [a,b].C.[a,b]) tenglama berilgan bo'lib, noma'lum element funksiyadan iborat bo'lsa, bunday tenglama funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma'lum funksiya integral ostida bo'lsa, u holda tenglama integral tenglama deyiladi. Masalan, (s)=[K(s.1)g(p(1),1)dt tenglama ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda funksiyalar.

K(s,t), g(s.t) berilganIntegral tenglamadagi ifoda noma'lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo'lgan holda tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi. Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misol bo'ladi:

[K(s.1)ø(t)dt+f(s) = 0, (3) (4)

bu yerda noma'lum funksiya, K(s,t) va f(s) ma'lum funksiyalar. (3) va (4) tenglamalar mos ravishda birinchi va ikkinchi tur Fredholm tenglamalari deyiladi. Xususan, K(s.1) funksiya > qiymatlar uchun K(s,t) =0 K(s.1)4(1) dt +f(s)=0, shartni qanoatlantirsa, u holda (3) va (4) tenglamalar mos ravishda $(s) = K(s,1)6(t)dt+f(s) ko'rinishlarga ega bo'ladi. Bunday tenglamalar birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari deyiladi. Volterra tenglamalari Fredholm tenglamalarining xususiy holi bo'lsada, ular alohida o'rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o'ziga xos bo'lgan xossalarga ega.

Biz bu yerda faqat ikkinchi tur Fredholm tenglamasini qaraymiz. [a,b] kompleks Hilbert fazosida ikkinchi tur Fredholm tenglamasini, ya'ni (4) tenglamani olamiz. Bu tenglamada ma'lum, noma'lum funksiyalar bo'lib, ular L[a,b] fazoning elementlaridir. (4) tenglamaning yadrosi deb nomlanuvchi K(s.1) funksiyadan quyidagilarni talab qilamiz, u o'lchovli va JJ K(s.1)F dsdt < K(s.1)

kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya.

L.[a,b] fazoda aniqlangan

(T)(s) = K(s.1)ø(t)dt.

shartni qanoatlantirsin, ya'ni operatorni qaraymiz. Bu operator K yadroli Fredholm operatori deb ataladi. (4) tenglamani o'rganish shu operatoming xossalarini tekshirishga keltiriladi. 2. AJRALGAN YADROLI XUSUSIY INTEGRALLI OPERATOR L_2-;] orqali [-] da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar Gilbert fazosini belgilaymiz.L_2l-π; π] fazoda (T5)(x,y) = u(x) x(t)f(t, y) dt ko'rinishdagi operatorni qaraymiz. Bu yerda v funksiya [-π;] da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya. Odatda 7 operatorga xususiy integralli operator deyiladi. Bunga sabab integral ostidagi ikki o'zgaruvchili f funksiya o'zgaruvchi bo'yicha integrallanmoqda, x esa ozod o'zgaruvchi. Yadro ajralgan hamda o'lchamlidir. Ta'kidlash joizki, bu turdagi operatorlar kvant maydon nazariyasi [3], qattiq jismlar fizikasi [4] va statistik fizikaning [5] ko'plab masalalarida uchrab turadi. v(x)= 1 bo'lgan hol [6-12] ishlarda diskret Shryodinger operatorini o'rganishda qo'zg'almas operatori (ko'paytirish operatori) uchun kompakt bo'magan qo'zg'alish sifatida o'rganilgan. [13-25] ishlarda esa v() funksiya o'zgarmasdan farqli bo'lgan hol qaralgan. Bu turdagi operatorlaring spektral xossalari [26-30] ishlarda Fridrixs modelining spektrini tadqiq qilish orqali o'rganilgan.

Dastlab, T operatorning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. Shu sababli ixtiyoriy f.gE L_2-;] elementlar va ixtiyoriy a,ß E C kompleks sonlar uchun T(af +Bg) aTf+BT g: (T(af +Bg))(x, y) = (T(af + Bg))(x,y) = a(Tf)(x, y) + B(Tg)(x,y); tengliklarni tekshiramiz. Operatorning ta'sir formulasiga ko'ra: = v(x) v(t)(af (t, y) + ßg(t, y)) dt = v(x) v(x) ["v(t)f (t, y) dt + fv(x) ["v(t)g(t, y)dt = = av(x) = a(Tf)(x, y) + B(Tg)(x,y). x) ["_v(t)af(t, y)dt + v(x) ["_v(t)ßg(t, y)dt = Ta'rifga ko'ra T chiziqli operator. Endi 7 operatorni chegaralanganlikka tekshiramiz. Buning uchun shunday C > O soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy ƒ E L_2[-π; π] element uchun tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. L_2-;] Gilbert fazosida x elementning normasi quyidagicha aniqlanadi: ||x|| = Ix(t)2dtTf elementni qaraymiz hamda uning normasini baholaymiz:

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I.Funksional analiz. O'quv-qo'llanma. Toshkent-Samarqand, 2009

. 2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов, Мир, М., 1982.

3. Friedrichs K.O. Perturbation of spectra in Hilbert space, 1965, AMS.. Providence, Rhode Island.

4. Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schroedinger operators: problems and results, Advances in Sov. Math., 5 (1991), pp.139-194.

5. Minlos R., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 177 (1996), pp.159-193.

6. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 5(2004), pp. 743-772.

7. Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теор. и мат. физика. 135:3(2003). С. 478-503.

8. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices. MathematischeNachrichten, 280:7 (2007), pp. 699-716.