ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассказывается о причинах проникновения математики во все области знания. В статье дано понятие математического моделирования, математической модели, рассмотрены этапы решения задач с помощью математического моделирования, приведены примеры решения задач с помощью составления математических моделей.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, математическая модель, дифференциальное и интегральное исчисление.*

В настоящее время математика проникла во все сферы человеческой деятельности и все науки. Математика стала необходимым орудием познания, прогнозирования и расчёта. Математические методы проникли в вопросы организации эксперимента и анализа экспериментальных данных.

Математический подход при познании явлений объективного мира позволяет глубже проникнуть в природу вещей и явлений и открыть ранее скрытые закономерности. Это обусловлено тем, что математика способна отражать явления и процессы материального мира точнее, полнее и глубже, чем это возможно лишь средствами непосредственного наблюдения, эксперимента и качественного осмысления полученных при этом результатов.

Причиной проникновения математики во все области знания также является то, что математике присуща огромная степень абстракции и необычайная широта ее понятий и принципов. Такие, например, понятия, как функция, число, вектор и др. позволяют отразить самые разнообразные явления и процессы объективного мира, в том числе и общественные.

Проникновение математики в различные науки объясняется еще и тем, что математика имеет исключительно строгую логику. Если есть определенные истинные математические посылки, то следствия из них в силу внутренней логики математики являются безошибочными.

Поэтому одна из задач учителя математики – показать, как используются математические понятия для понимания явлений и процессов, изучаемых науками о природе и обществе.

При изучении физических, химических, биологических явлений, а также социальных и психологических процессов используются различные средства математики, в том числе математическое моделирование.

Математическое моделирование – это исследование явлений, процессов, систем или объектов с помощью построения и изучения их моделей и использования этих моделей для определения характеристик и рациональных способов построения новых конструируемых технологических процессов, систем и объектов.

Математическая модель – это описание явления, процесса, системы или объекта с помощью математических понятий и языка (в виде уравнений, неравенств, их систем, функций).

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Но в результате замены реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Решение задач с помощью математического моделирования состоит из трех этапов.

Первый этап – этап формализации – перевод условия задачи на математический язык, т. е. составление математической модели задачи;

Второй этап – решение математической задачи, сформулированной на первом этапе;

Третий этап – этап интерпретации – полученное математическое решение переводится на язык исходной задачи.

Рассмотрим использование математического моделирования при изучении дифференциального и интегрального исчислений в задачах на экстремум.

Дифференциальное исчисление – раздел математического анализа, в котором изучаются производные и способы их применения к исследованию функций.

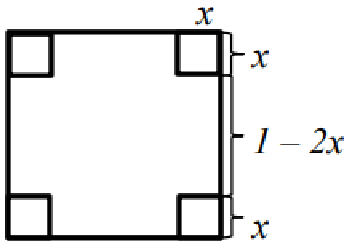
Интегральное исчисление – раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства и их применение к решению задач.

З а д а ч а 1. Из квадратного листа картона 1×1 *м* вырезают по углам квадраты и сгибают коробку. Какие стороны должны иметь отрезанные квадраты, чтобы вместимость полученной коробки была наибольшей?

Р е ш е н и е.

I этап. *Составление математической модели.*

Пусть сторона отрезанного квадрата x м. Так как квадраты вырезаются с обеих сторон данного квадратного листа картона, то $x \in (0; 0{,}5)$.



По условию задачи вместимость коробки должна быть наибольшей. Это требование означает, что объем коробки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, должен быть наибольшим.

Выразим размеры прямоугольного параллелепипеда через x:

длина – $(1 - 2x)$ *м*, ширина – $(1 - 2x)$ *м*, высота – x м.

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V = (1-2x)^2 \cdot x$$

Тогда математически эта задача может быть сформулирована следующим образом: «При каком значении x функция V принимает наибольшее значение?»

II этап. *Работа с составленной моделью.*

1) Найдем производную функции:

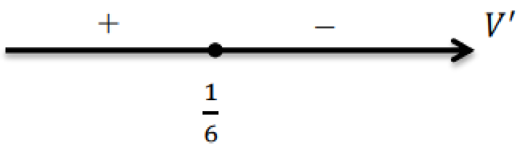
$$V' = ((1-2x)^2 \cdot x)' = (x - 4x^2 + 4x^3)' = 1 - 8x + 12x^2$$

2) Найдем критические точки функции:

$$V' = 0;\ 12x^2 - 8x + 1 = 0\ ;\ x_1 = \frac{1}{6}\ ;\ x_2 = \frac{1}{2} \notin (0; 0{,}5)$$

3) Определим, как меняется знак производной при переходе через критическую точку:

$$V'\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - 1 + \frac{12}{64} > 0;\ \ V'\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - 2 + \frac{12}{16} < 0.$$



$x = \frac{1}{6}$ – точка максимума, значит, в этой точке функция V принимает свое наибольшее значение.

III этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Полученное математическое решение переводим на язык исходной задачи: коробка будет иметь наибольшую вместимость, если срезать по углам квадраты со стороной, равной $\frac{1}{6}$ *м*.

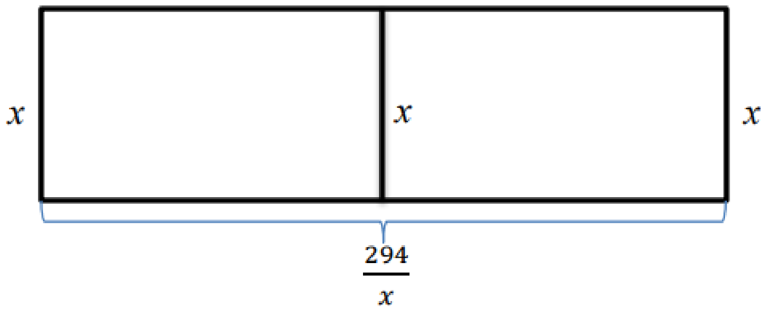
О т в е т: $\frac{1}{6}$ *м*.

З а д а ч а 2. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

Р е ш е н и е.

I этап. *Составление математической модели.*

Пусть одна из сторон участка $a = x$ *м*, тогда другая сторона участка $b = \frac{294}{x}$ *м*, $x \in (0; 294)$.



По условию задачи длина всего забора должна быть наименьшей. Это означает, что периметр участка, имеющего форму прямоугольника, должен быть наименьшим.

Выразим периметр участка через *x:*

$$P = 3a + 2b = 3x + 2 \cdot \frac{294}{x} = 3x + \frac{588}{x}$$

Тогда математически эта задача может быть сформулирована следующим образом: «При каком значении *x* функция P принимает наименьшее значение?»

II этап. *Работа с составленной моделью.*

1) Найдем производную функции:

$$\mathrm{P}' = \left(3x + \frac{588}{x}\right)' = 3 - \frac{588}{x^2}$$

2) Найдем критические точки функции:

$$P' = 0;\ \ 3 - \frac{588}{x^2} = 0;\quad x_1 = 14,\quad x_2 = -14 \notin (0; 294)$$

3) Определим, как меняется знак производной при переходе через критическую точку:

при $0 < r < 14$ $P' < 0$, а при $14 < r < 294$ $P' > 0$.

Следовательно, $x = 14$ – точка минимума.

Если функция, непрерывная на промежутке, имеет на нем один экстремум, то он совпадает с наибольшим (наименьшим) значением функции на этом промежутке. Значит, функция P принимает наименьшее значение при $x = 14$.

III этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Полученное математическое решение переводим на язык исходной задачи: длина забора будет наименьшей при $a = 14$ *м*, $b = 21$ *м*.

О т в е т: 14 *м*, 21 *м*.

З а д а ч а 3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 12t - 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Р е ш е н и е.

I этап. *Составление математической модели.*

Если известна скорость прямолинейного движения материальной точки $v = v(t)$, то можно найти путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от t_0 *д о* t по формуле Ньютона-Лейбница:

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки.

II этап. *Работа с составленной моделью.*

Найдем момент остановки тела. Для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно *t*:

$$12t - 3t^2 = 0, \ \ t(4 - t) = 0, \qquad t_1 = 0, \ \ t_2 = 4.$$

Найдем искомый путь:

$s = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\mathrm{I}_0^4 = 32$ (м)

III этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Путь от начала движения до остановки равен 32 м.

О т в е т: 32 *м*.

З а д а ч а 4. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме *V* на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

Р е ш е н и е.

I этап. *Составление математической модели.*

Пусть *r* – радиус основания цилиндра, $r \in (0; \infty)$, *h* – высота цилиндра, тогда объем цилиндра $V = \pi r^2 h$. Отсюда $h = \frac{V}{\pi r^2}$. По условию задачи на изготовление открытого цилиндрического бака должно пойти наименьшее количество металла. Это означает, что полная поверхность цилиндра без верхнего основания должна быть наименьшей.

Площадь поверхности открытого цилиндра

$$S = 2\pi rh + \pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2V}{r} + \pi r^2 = \frac{2V + \pi r^3}{r}.$$

Тогда математически эта задача может быть сформулирована следующим образом: «При каком значении *r* функция S принимает наименьшее значение?»

II этап. *Работа с составленной моделью.*

1) Найдем производную функции:

$S' = \left(\frac{2V + \pi r^3}{r}\right)' = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}$

2) Найдем критические точки функции:

$S' = 0;\ \ \dfrac{2\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0\ ;\ \ r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$

3) Определим, как меняется знак производной при переходе через критическую точку.

При $0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $S' < 0$, а при $r > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ $S' > 0$.

Следовательно, в точке $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ функция S имеет минимум. Значит, в этой точке функция *S* принимает наименьшее значение.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

III этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Наименьшее количество листового металла пойдет на изготовление открытого цилиндрического бака заданного объема, если радиус основания и высота цилиндрического бака будут равны между собой

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

О т в е т: $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Производные и интегралы имеют большое практическое применение. С их помощью решаются многие практические задачи. Кроме этого задачи на экстремум встречаются на вступительных экзаменах. Применение математического моделирования поможет учащимся решать такие задачи.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. – М.: Просвещение, 1990.
2. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. – М: Просвещение, 1990.
3. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. – М.: Мир и образование, 2013.