МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассмотрены методы решения простейших тригонометрических неравенств. На примерах показано решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности и с помощью графиков тригонометрических функций. Для каждого вида тригонометрических неравенств приведен алгоритм решения неравенства, также приведены формулы для решения тригонометрических неравенств.*

Ключевые слова: *простейшее тригонометрическое неравенство, единичная окружность, график тригонометрической функции.*

Решение тригонометрических неравенств стоит в одном ряду с такими важными темами, как решение числовых неравенств. Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделялось особое место в курсе математики. Ещё греки, на заре человечества, считали тригонометрию важнейшей из наук, ибо геометрия – царица математики, а тригонометрия – царица геометрии.

Изучая тему «Тригонометрические неравенства», сначала нужно научиться решать простейшие неравенства: $\sin x > a$, $\sin x < a$; $\cos x > a$, $\cos x < a$, $tg\, x > a$, $tg\, x < a$; $ctg\, x > a$, $ctg\, x < a$. Затем, освоив данные неравенства, можно научиться решать более сложные неравенства, содержащие несколько функций одновременно, содержащие разные функции в разных степенях и всевозможные их комбинации.

С помощью преобразований любое тригонометрическое неравенство сводится к простейшему (или нескольким простейшим) тригонометрическому неравенству.

Тригонометрическими неравенствами называют неравенства, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций.

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится к решению простейших неравенств.

Простейшие тригонометрические неравенства – это неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x < a$; $\cos x > a$, $\cos x < a$; $\mathrm{tg}\, x > a$, $\mathrm{tg}\, x < a$; $\mathrm{ctg}\, x > a$, $\mathrm{ctg}\, x < a$, где a – действительное число.

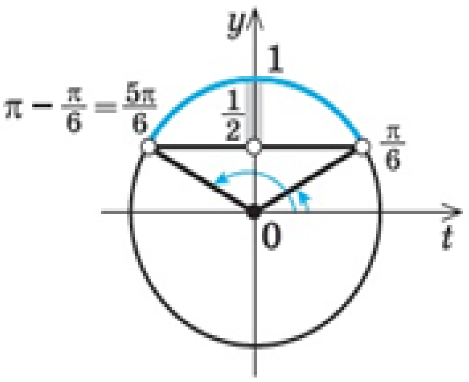
Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Для решения простейших тригонометрических неравенств используют единичную окружность или графики тригонометрических функций. Рассмотрим решения простейших тригонометрических неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

I способ (с помощью единичной окружности).

Зная, что синус – это ордината точки единичной окружности, найдем на единичной окружности точки, которые имеют ординату большую $\frac{1}{2}$.



Эти точки лежат выше прямой $y = \frac{1}{2}$. Значит множество точек, удовлетворяющих данному неравенству – это верхняя дуга окружности. Концы дуги не входят в множество решений. Правому концу дуги соответсвует угол $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, а левому концу соответствует угол $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

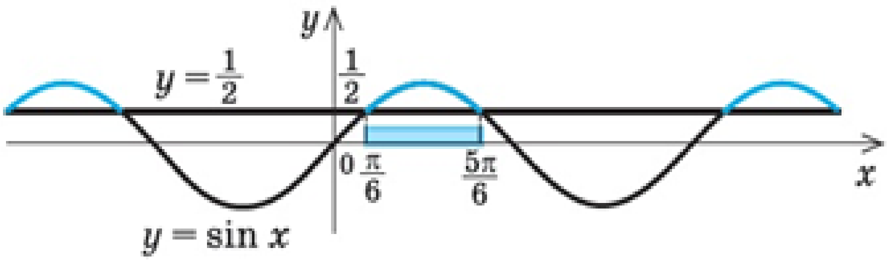
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ – это решения неравенства в пределах одного периода. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам промежутка прибавить $2\pi n$, так как период синуса равен 2π.

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

II способ (с помощью графика).

1) В одной системе координат построим график функции $y = \sin x$ и график функции $y = \frac{1}{2}$.



2) Отметим точки пересечения графиков.

3) Прямая $y = \frac{1}{2}$ делит график функции $y = \sin x$ на две части. Абсциссы множества точек расположенные в верхней части от прямой $y = \frac{1}{2}$ удовлетворяют неравенству. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ из уравнения $\sin = \frac{1}{2}$. Получим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

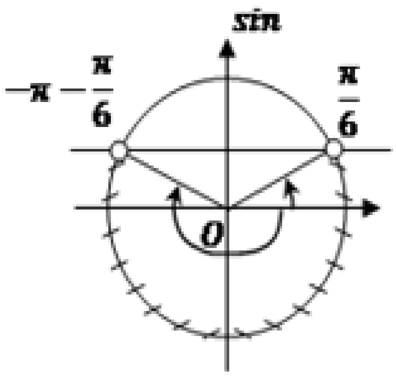
При $n = 0$ абсцисса точки пересечения равна $\frac{\pi}{6}$, при $n = 1$ абсцисса равна $\frac{5\pi}{6}$. Значит, решением неравенства на интервале $0 < x < 2\pi$ является множество точек, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

4) Чтобы получить общее решение неравенства, прибавим к обеим частям неравенства $2\pi n$, получим $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

Способ решения неравенств с помощью единичной окружности более простой, удобный и позволяет легко решать простейшие тригонометрические неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.



На оси Oy отметим $\frac{1}{2}$ и через эту точку проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая разделила окружность на две дуги. Выделим нижнюю дугу, так как знак неравенства "$<$". Концы дуги выделяем пустыми кружочками, так как знак неравенства строгий, эти точки не входят в множество решений. Найдем углы, соответствующие концам дуги. Для этого проведем радиусы в концы дуги и стрелки от нулевого угла до радиусов. Первую стрелку проводим от нулевого угла до ближайшего радиуса, вторую стрелку – от нулевого угла до второго радиуса так, чтобы она проходила параллельно с выделенной дугой. В соответствии со стрелками найдём углы. Первый угол равен $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, а второй угол равен

$-\pi - \frac{\pi}{6} = -\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{7\pi}{6}$.

Учитывая периодичность функции синус, окончательно получим интервалы $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

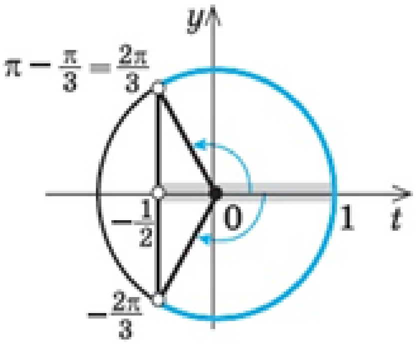
Алгоритм решения неравенства $\sin x > a$ ($\sin x < a$).

1. **На оси Oy отметить значение a и провести прямую параллельно оси Ox.**
2. **Выделить дугу в соответствии со знаком неравенства:**
   если знак "$>$", то верхнюю дугу; если знак "$<$", то нижнюю дугу.
3. **Найти углы, соответствующие концам дуги, для этого провести радиусы в концы дуги и стрелки.**
4. **Записать общее решение неравенства, учитывая периодичность синуса.**

Пример 3. Решить неравенство $\cos x > -\frac{1}{2}$.

I способ (с помощью единичной окружности).

Построим единичную окружность и на оси Ox отметим точку $-\frac{1}{2}$ (так как на единичной окружности косинусам соответствует ось абсцисс).



Через эту точку проведем прямую параллельно оси Oy. Эта прямая разделила окружность на две дуги – левую и правую. Так как знак неравенства " > ", то выбираем правую дугу. Концы дуги отмечаем пустыми кружочками, они не входят в множество решений.

Найдем углы, соответствующие концам дуги. Верхнему концу дуги соответствует угол $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, а нижнему концу дуги соответствует угол $-\frac{2\pi}{3}$.

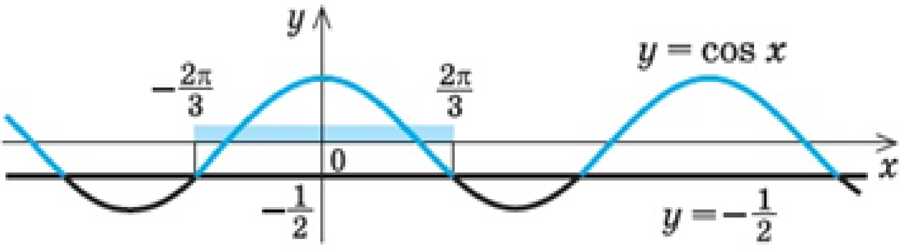
Учитывая периодичность косинуса, запишем решение неравенства

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$.

II способ (с помощью графика).

1) В одной системе координат построим график функции $y = \cos x$ и график функции $y = -\frac{1}{2}$.



2) Отметим точки пересечения графиков.
3) Прямая $y = -\frac{1}{2}$ делит график функции $y = \cos x$ на две части. Абсциссы множества точек расположенные в верхней части от прямой $y = -\frac{1}{2}$ удовлетворяют неравенству. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Получим: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

При $n = 0$ абсциссы точек пересечения будут равны $\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$.

Отметим эти точки на графике.

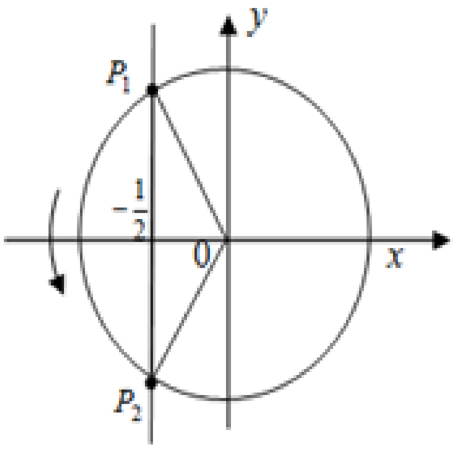
Решением неравенства является множество точек, удовлетворяющих условию $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$.

4) Чтобы получить общее решение неравенства, прибавим к обеим частям неравенства $2\pi n$, получим

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \epsilon Z$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \epsilon Z.$

Пример 4. Решить неравенство $\cos x \le -\frac{1}{2}$.



На оси Ox отметим точку $-\frac{1}{2}$ и через неё проведём прямую, параллельно оси Oy. Решению неравенства соответствует левая дуга, так как знак неравенства " $\le$ ".

Концы дуги отмечаем закрашенными кружочками, так как знак неравенства нестрогий, они будут входить в множество решений.

Найдем углы, соответствующие концам дуги.

$$P_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{и} \quad P_2 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Учитывая периодичность косинуса, запишем решение неравенства

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \epsilon Z$$

Ответ: $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], n \epsilon Z.$

Алгоритм решения неравенства $\cos x > a$ ($\cos x < a$).

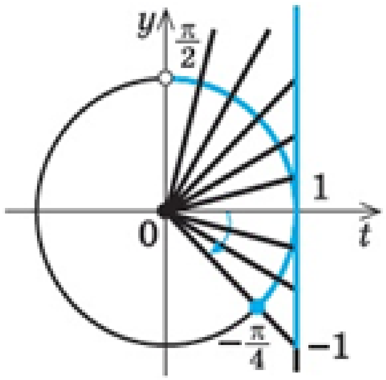
1. **На оси Ox отметить значение a и провести прямую параллельно оси Oy.**
2. **Выделить дугу в соответствии со знаком неравенства:**
   если знак " > ", то правую дугу; если знак " < ", то левую дугу.
3. **Найти углы, соответствующие концам дуги, для этого провести радиусы в концы дуги и стрелки.**
4. **Записать общее решение неравенства, учитывая периодичность косинуса.**

При решении простейших тригонометрических неравенств вида $tg\,x > a$, $tg\,x < a$ важно знать, что:

1) тангенс не существует, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;
2) период тангенса равен π.

Пример 5. Решить неравенство $tg\,x \geq -1$.

I способ (с помощью единичной окружности).



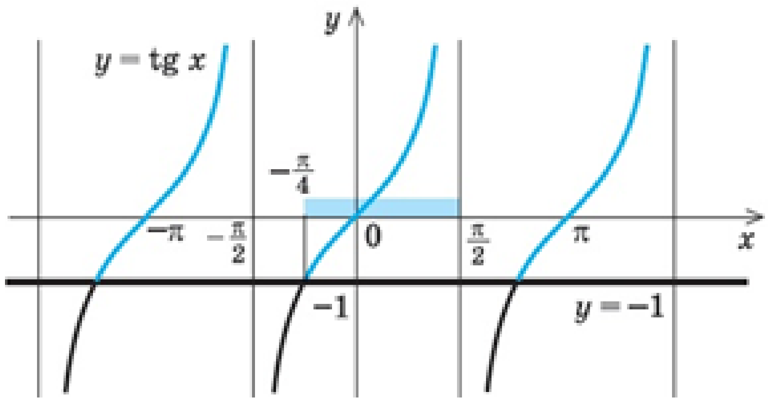
Построим единичную окружность и проведем *линию тангенсов* – касательную к окружности в точке (1; 0). На линии тангенсов отметим точку −1 и соединим ее с центром окружности. Искомое множество решений – это верхняя дуга правой полуокружности. Нижний конец этой дуги входит в множество решений, так как неравенство нестрогое, а верхний конец дуги не входит в множество решений, так как в точке $\frac{\pi}{2}$ тангенс не существует. Нижнему концу дуги соответствует угол $arctg\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Учитывая периодичность тангенса, запишем решение неравенства:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n, \ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

II способ (с помощью графика).

1) В одной системе координат построим график функции $y = tg\,x$ и график функции $y = -1$.



2) Найдём промежуток оси абсцисс, на котором график функции $y = tg\,x$ проходит выше прямой $y = -1$. Найдём абсциссу точки пересечения графиков функций $y = tg\,x$ и $y = -1$ из уравнения $tg\,x = -1$.

Получим: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

При $n = 0$ абсцисса точки пересечения равна $-\frac{\pi}{4}$.

Решением неравенства является множество точек, удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

3) С учётом периодичности функции $y = tg\,x$ получим $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Алгоритм решения неравенства $tg\,x > a$ $(tg\,x < a)$.

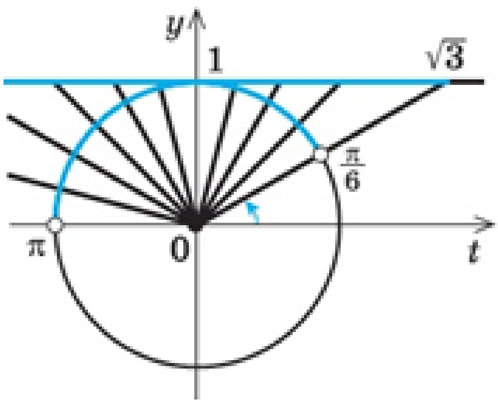
1. **Провести линию тангенсов и отметить на ней точку a.**
2. **Соединить точку a с центром единичной окружности.**
3. **Выделить дугу на правой части единичной окружности в соответствии со знаком неравенства:**
   если знак " > ", то верхнюю дугу;
   если знак " < ", то нижнюю дугу.
4. **Найти углы, соответствующие концам дуги. Угол, расположенный внутри правой полуокружности равен $arctg\,a$.**
5. **Записать общее решение неравенства, учитывая область определения и периодичность тангенса.**

При решении простейших тригонометрических неравенств вида $ctg\,x > a$, $ctg\,x < a$ важно знать, что:

1) котангенс не существует, если $x = \pi n,\ n \in Z$;
2) период котангенса равен π.

Пример 6. Решить неравенство $ctg\,x < \sqrt{3}$.

I способ (с помощью единичной окружности).



Построим единичную окружность и проведем *линию котангенсов* – касательную к окружности в точке (0; 1). На линии котангенсов отметим точку $\sqrt{3}$ и соединим ее с центром окружности. Искомое множество решений – это левая дуга верхней полуокружности. Концы дуги выделяем пустыми кружочками, так как знак неравенства строгий, эти точки не входят в множество решений. Угол, соответствующий правому концу дуги, равен $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, а угол, соответствующий левому концу дуги, равен π.

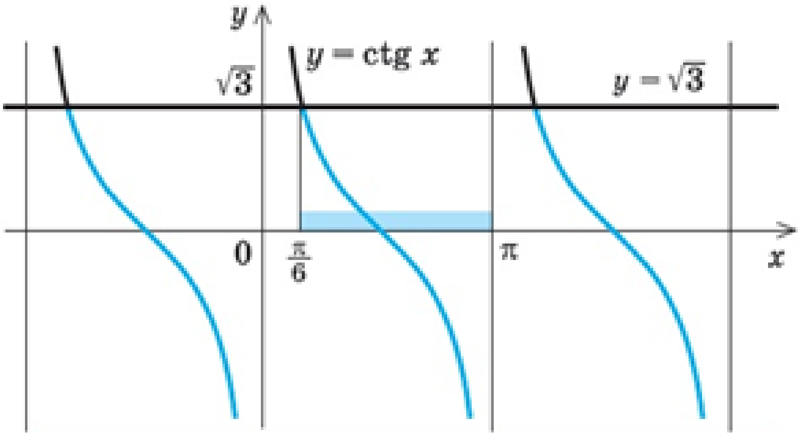
Учитывая периодичность котангенса, запишем решение неравенства:

$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \epsilon Z$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi + \pi n\right), n \epsilon Z.$

II способ (с помощью графика).

1) В одной системе координат построим график функции $y = ctg\,x$ и график функции $y = \sqrt{3}$.



2) Найдём промежуток оси абсцисс, на котором график функции $y = ctg\,x$ проходит ниже прямой $y = \sqrt{3}$. Найдём абсциссу точки пересечения графиков функций $y = ctg\,x$ и $y = \sqrt{3}$ из уравнения $ctg\,x = \sqrt{3}$.
Получим: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z.$
При $n = 0$ абсцисса точки пересечения равна $\frac{\pi}{6}$.
Решением неравенства является множество точек, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{6} < x < \pi.$
3) С учётом периодичности функции $y = ctg\,x$ получим

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \epsilon Z$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi + \pi n\right), n \epsilon Z.$

Алгоритм решения неравенства $ctg\,x > a$ $(ctg\,x < a)$.

1. **Провести линию котангенсов и отметить на ней точку a.**
2. **Соединить точку a с центром единичной окружности.**
3. **Выделить дугу на верхней части единичной окружности в соответствии со знаком неравенства:**
   если знак " > ", то правую дугу; если знак " < ", то левую дугу.

4. Найти углы, соответствующие концам дуги. Угол, расположенный внутри верхней полуокружности равен $arcctg\ a$.
5. Записать общее решение неравенства, учитывая область определения и периодичность котангенса.

Решение простейших тригонометрических неравенств по формулам.

Решение простейших тригонометрических неравенств в общем виде.	
Значение a	*Решение*
1. Неравенство $\sin x > a$	
$-1 \le a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$
$a \ge 1$	Решений нет.
$a < -1$	x – любое действительное число.
2. Неравенство $\sin x \ge a$	
$-1 < a < 1$	$\arcsin a + 2\pi k \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$
$a \le -1$	x – любое действительное число.
3. Неравенство $\sin x < a$	
$-1 < a \le 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$
$a \le -1$	Решений нет.
$a > 1$	x – любое действительное число.
4. Неравенство $\sin x \le a$	
$-1 < a < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le x \le \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$
$a < -1$	Решений нет.
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$
$a \ge 1$	x – любое действительное число.
5. Неравенство $\cos x > a$	
$-1 \le a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$
$a \ge 1$	Решений нет.
$a < -1$	x – любое действительное число.
6. Неравенство $\cos x \ge a$	
$-1 < a < 1$	$-\arccos a + 2\pi k \le x \le \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$
$a > 1$	Решений нет.
$a = 1$	$x = 2\pi k, k \in Z.$
$a \le -1$	x – любое действительное число.
7. Неравенство $\cos x < a$	
$-1 < a \le 1$	$\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$
$a > 1$	x – любое действительное число.
$a \le -1$	Решений нет.
8. Неравенство $\cos x \le a$	
$-1 < a < 1$	$\arccos a + 2\pi k \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$
$a < -1$	Решений нет.

$a = -1$	$x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$
$a \geq 1$	$x -$ любое действительное число.
9. Неравенство $tg\ x > a$	
$a -$ любое действительное число $(a \in R)$	$arctg\ a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$
10. Неравенство $tg\ x \geq a$	
$a \in R$	$arctg\ a + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$
11. Неравенство $tg\ x < a$	
$a \in R$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < arctg\ a + \pi k, k \in Z.$
12. Неравенство $tg\ x \leq a$	
$a \in R$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq arctg\ a + \pi k, k \in Z.$
13. Неравенство $ctg\ x > a$	
$a \in R$	$\pi k < x < arcctg\ a + \pi k, k \in Z.$
14. Неравенство $ctg\ x \geq a$	
$a \in R$	$\pi k < x \leq arcctg\ a + \pi k, k \in Z.$
15. Неравенство $ctg\ x < a$	
$a \in R$	$\mathrm{arcctg}\ a + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in Z.$
16. Неравенство $\mathrm{ctg}\ x \leq a$	
$a \in R$	$\mathrm{arcctg}\ a + \pi k \leq x < \pi + \pi k, k \in Z.$

Мастерство и навык решать тригонометрические неравенства в курсе алгебры и математического анализа, являются, несомненно, важными не только для усвоения курса математики, но и для дальнейшего процесса обучения. Каждый учащийся может поступить в ВУЗ, где обязательно понадобятся расширенные знания алгебры, в том числе тригонометрии.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. II. Т. «Ilm ziyo», 2013 г.
2. Алгебра и основы анализа. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Учебное пособие для 10-11 классов. 1992г.
3. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. – М. : АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. – 656 с.
4. В. С. Крамор: Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – Москва. 1994 г.