FUNKSIYA LIMITI VA UNING ASOSIY XOSSALARI

Baxshullayeva Mohinur Shaxobiddinovna
Buxoro viloyati Shofirkon tumani Kasb-hunar maktabining
Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqola funksiya limiti va uning xossalri, cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari, cheksiz katta miqdorlar, funksiya limitini hisoblash qoidalari, funksiya limitining mavjudlik shartlari haqida to'liq ma'lumotlar keltirilgan.

Kalit so'zlar: funksiya, limit, ketma- ketlik, cheksiz kichik miqdor, cheksiz katta miqdor, chap limit, o'ng limit, signum funksiya

a_1 , a_2, • • •, a_n, • • • ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif . Agar ixtiyoriy $s > 0$ son uchun, shunday N nomer topilsaki, a_n ketma-ketlikning $n > N$ shartini qanoatlantiruvchi hadlari uchun tengsizlik o'rinli bo'lsa, A

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad (|a_n - A| < \varepsilon)$$

soni ketma ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ yoki } a_n \to A$$

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif . Agar A soni chekli bo'lsa, ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi. Agar ketma-ketlikning limiti chekli bo'lmasa yoki ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa, ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar a_n ketma-ketlikning elementlarini tekislikda (n, a_n) nuqtalar orqali ifodalasak,

$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ tengsizlik $n > N$ shartini qanoatlantiruvchi (n, a_n) barcha nuqtalar absissa o'qiga parallel bo'lgan A-ε va A+ε to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan bo'ladi.

Ta'rif. Agar a_n ketma-ketlik uchun $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ bo'lsa, a_n cheksiz

kichik miqdor deyiladi.

Ta'rif **.** Agar etarli katta musbat M son uchun shunday nomer N topilsaki, $n>N$ lar uchun $n>M$ bo'lsa, $/\beta_n/$ >M ketma-ketlik cheksiz katta miqdor deyiladi va ko'rinishda

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$$

yoziladi.

Ta'rif: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy ε>0 son uchun unga bog'liq shunday δ=δ(ε)>0 son topilsaki, 0<|x-a|<δ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun |$f(x)$–A|<ε tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $y=f(x)$ funksiyaning x→ a bo'lgandagi limiti deb ataladi.

Ta'rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

ko'rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

ekanligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatamiz. Bu yerda $x\to 3$ bo‘lgani uchun $2<x<4$, ya’ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya’ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta’rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif: Agar har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo‘lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ (a–chekli son) bo‘lganda cheksiz limitga ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi .

Ta’rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda $x\to 2$ bo‘lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N>0$ soni bo‘yicha $\delta=\delta(N)>0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N) \quad .$$

Demak, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo‘ladi.

Ta’rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda chekli limitga ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon),$$

ya’ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif: Agar har qanday katta N>0 soni uchun shunday M=M(N) son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x \to \pm\infty$ bo'lganda cheksiz limitga ega deyiladi,

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, ta'rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Teorema: Agar $x \to a$ bo'lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y=f(x)$ funksiya $x \to a$ bo'lganda ikkita A va B limitlarga ega bo'lsin. Unda, limit ta'rifiga ko'ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va

$0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ deb olsak, unda $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda yuqoridagi ikkala tengsizlik ham bajariladi va shu sababli, absolut qiymat xossalariga asosan,

$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B| \leq |f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon>0$ ixtiyoriy kichik son bo'lganidan va A, B sonlar x ga bog'liq emasligidan $|A-B|=0$, ya'ni $A=B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak funksiya limiti mavjud bo'lsa, u faqat yagona bo'ladi.

Ba'zi hollarda funksiyaning chap va o'ng limiti tushunchalari kerak bo'ladi.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o'ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x \to a-0$ yoki $x \to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o'ng limiti*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limiti

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases} \qquad (1)$$

funksiya uchun $x=0$ nuqtadagi chap va o'ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \to 0+0} 1 = 1.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alixonov S. «Matematika o'qitish metodikasi». T., «O'qituvchi» 1992 yil.

2. Alixonov S. « Matematika oʻqitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri.T.«Oʻqituvchi» 1997 yil.

3. Bikboeva N.U. v a b o shqalar «Boshlangʻich sinflarda m a t e m a tika oʻqitish metodikasi», T., «Oʻqituvchi», 1996 yil.