БАЪЗИ СОДДА РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ.

Г. А. Расулова
Ё. .Б. Джўраева
Фарғона давлат университети

УШБУ

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \qquad (1)$$

кўринишдаги касрлар содда касрлар деб аталади, бу ерда $n\in N$ ва $n>1$

Маълумки, (1) ифодадаги биринчи содда касрнинг бошланғич функцияси

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_n(x) \qquad (2)$$

рекуррент формула ѐрдамида топилади [1]. Агар агар $4q-p^2>0$ бўлса, (1) ифодадаги иккинчи содда каср биринчи содда каср орқали ифодаланиб унинг бошланғич функцияси (2) рекуррент формула ѐрдамида ҳисобланади.

Биздан

$$\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^n(x^2+px+q)^m} \qquad (4)$$

кўринишдаги содда касрнинг бошланғич функциясини топиш талаб этилган бўлсин. Бу ерда $n,m\in N$, ва $n,m>1$; $P(x)$ $-2n+2m-1$ даражали кўпҳад.

(4) кўринишидаги содда касрни бошланғич функциясини топиш учун аввало, уни қуйидаги содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодалаб оламиз:

$$\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^n(x^2+px+q)^m}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+a^2}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+a^2)^2}+..+\frac{A_ix+B_i}{(x^2+a^2)^i}+..+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+a^2)^n}+$$

$$+\frac{D_1x+E_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2}+..+\frac{D_jx+E_j}{(x^2+px+q)^j}+..+\frac{D_mx+E_m}{(x^2+px+q)^m}. \qquad (5)$$

(5) тенгликнинг ҳар икки тарафини интеграллаб,

$$\int\frac{P(x)}{(x^2+a^2)^n(x^2+px+q)^m}dx=$$

$$\int\left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+a^2}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+a^2)^2}+..+\frac{A_ix+B_i}{(x^2+a^2)^i}+..+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+a^2)^n}\right)dx+$$

$$+\int\left(\frac{D_1x+E_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2}+..+\frac{D_jx+E_j}{(x^2+px+q)^j}+..+\frac{D_mx+E_m}{(x^2+px+q)^m}\right)dx \qquad (6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (6) тенгликни ўнг томонидаги интегралларни мос рафишда K_n ва L_n билан белгилаб ҳадлаб интеграллаймиз:

$$K_n=\int\frac{A_1x+B_1}{(x^2+a^2)^1}dx+\int\frac{A_2x+B_2}{(x^2+a^2)^2}dx+..+\int\frac{A_ix+B_i}{(x^2+a^2)^i}dx+..+\int\frac{A_nx+B_n}{(x^2+a^2)^n}dx,$$

$$L_m=\int\frac{D_1x+E_1}{(x^2+px+q)^1}dx+\int\frac{D_2x+E_2}{(x^2+px+q)^2}dx+\ldots$$

$$+\int \frac{D_j x+E_j}{x^2+px+q^j}dx+\ldots+\int \frac{D_m x+E_m}{x^2+px+q^m}dx.$$

Энди K_n ва L_n интегралларни бевосита ҳисоблаб

$$K_n=\frac{A_1}{2}\ln x^2+a^2+\frac{B_1}{a}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{A_i}{i-1\;\; x^2+a^2\;^{i-1}}-2B_i\cdot I_i x\right)\cdot$$

$$L_m=\frac{D_1}{2}\ln t^2+b^2+\left(E_1-D_1\frac{p}{2}\right)\frac{1}{b}arctg\frac{t}{b}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{A_i}{j-1\;\; t^2+b^2\;^{j-1}}-2E_i-D_j pI_j x\right).$$

кўринишда топамиз, бу ерда $t=x+\dfrac{p}{2}$, $b^2=q-\dfrac{p^2}{4}$.

Топилган K_n ва L_n интегралларнинг қийматларини қўшиб, (4) функциянинг бошланғич функциясини ушбу рекуррент формула ѐрдамида ифодалаймиз:

$$\int\frac{Px}{x^2+a^2\;^n\; x^2+px+q^m}dx=K_n+L_m=$$

$$=\ln\sqrt{x^2+a^2\;^{A_1}\; t^2+b^2\;^{D_1}}+\frac{B_1}{a}arctg\frac{x}{a}+\left(E_1-D_1\frac{p}{2}\right)\frac{1}{b}arctg\frac{t}{b}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{A_i}{i-1\; x^2+a^2\;^{i-1}}-2B_i\cdot I_i\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{D_j}{j-1\;\; t^2+b^2\;^{j-1}}-2E_j-D_j pI_j t\right),$$

бу ерда, $t=x+\dfrac{p}{2}$, $b^2=q-\dfrac{p^2}{4}$.

(6) интегралда $n=m$ бўлса, топилган охирги формула

$$\int\frac{Px}{x^2+a^2\;^n\; x^2+px+q^m}dx=\ln\sqrt{x^2+a^2\;^{A_1}\; t^2+b^2\;^{D_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{a}arctg\frac{x}{a}+\left(E_1-D_1\frac{p}{2}\right)\frac{1}{b}arctg\frac{t}{b}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{A_i\;\; x^2+px+q^{i-1}+D_j x^2+a^2}{i-1\; x^2+a^2\;^{i-1}\;\; x^2+px+q^{i-1}}-2B_i\cdot I_i-2E_i-D_i pI_i t\right).$$

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ. 1-қисм. -Тошкент: Ўқитувчи. 1994й. 2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma‟ruzalar. I T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 374 b