PANJARADAGI LAPLAS OPERATORI UCHUN INVARIANT QISM FAZOLAR

Mardanov Asliddin
Tolliyev Ibrohim
Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti akademik litseyi

Annotatsiya: *Mazkur ishda (2)-(4) formulalar yordamida aniqlanuvchi Laplas operatori uchun* $L_2^-(T)$ *va* $L_2^+(T)$ *hamda* $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ *va* $L_2^{+j}(T)$ *qism fazolarning invariantligi ko'rsatilgan.*

Tayanch iboralar: *Panjara, Hilbert fazolari, qism fazolar, operatorga nisbatan invariant qism fazolar, Laplas operatori, Furye almashtirishi, xos qiymat, xos funksiya.*

Аннотация*: В данной работе показана инвариантность подпространств* $L_2^-(T)$ *и* $L_2^+(T)$ *и* $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ *и* $L_2^{+j}(T)$ *для оператора Лапласа, определяемого по формулам (2)-(4).*

Ключевые слова: *Решетка, гильбертово пространство, частичные пространства, операторно-инвариантные частичные пространства, оператор Лапласа, преобразование Фурье, собственное значение, собственная функция.*

Abstract: *This paper shows the invagance of the subspaces* $L_2^-(T)$ *and* $L_2^+(T)$, $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ *and* $L_2^{+j}(T)$ *the Laplace operator, defined by formulas (2)-(4).*

Key words: *Lattice, Hilbert space, partial spaces, operator-invariant partial spaces, Laplace operator, Fourier transform, eigenvalue, eigenfunction.*

KIRISH

Hilbert fazolarida berilgan o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning spektrini o'rganishda uchraydigan eng sodda masalalardan biri – bu invariant elementlarni, hech bo'lmaganda bu operator ta'sirida o'zining yo'nalishini saqlab qoluvchi elementlarni topishdan, ya'ni

$$Hf = \lambda f \qquad (1)$$

tenlamaning yechimlarini topishdan iborat. (1) tenglamaning noldan farqli har bir yechimi H operatorlarning xos vektori, λ - esa H operatorning xos qiymati deyiladi. Agar λ operatorning xos qiymati bo'lsa, (1) tenglamaning barcha yechimlari to'plami qism fazo tashkil qiladi. Bu qism fazo H operatorning invariant qism fazosi bo'ladi va u λ xos qiymatga mos xos qism fazo deyiladi. λ xos qiymatning karraligi shu xos qism fazoning o'lchami sifatida aniqlanadi. Biz bu ishda ikki o'lchamli panjarada ikki zarrachali Laplas tipidagi operatorning invariant qism fazolarini o'rganamiz.

Panjaradagi ikki zarrachali sistema Hamiltonianining ba'zi spektral xossalari [1] ishda tahlil qilingan. [2] ishda panjaradagi ikki zarrachali Hamiltonian $H(k)$ ning invariant qism (xos qism) fazolari chekli bo'lishining yetarli shartlari keltirilgan. [3] ishda esa ikki o'lchamli panjarada berilgan ikki zarrachali sistema Hamiltonianining kvaziimpuls koordinatalaridan biri $k^{(1)}=\pi$ yoki $k^{(2)}=\pi$ boʻlganda cheksiz koʻp invariant qism fazolarga ega ekanligi isbotlangan. Ikki oʻlchamli panjarada berilgan ikki zarrachali Shryodinger operatorining invariant qism fazolari [4] ishda oʻrganilgan.

Bu ishda bir oʻlchamli panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Laplas operatorini qaraymiz. Toq funksiyalardan tashkil topgan $L_2^-(T)$ va juft funksiyalardan iborat $L_2^+(T)$ qism fazolar bu operator uchun invariant qism fazolar boʻlishligi isbotlangan.

Masalaning qoʻyilishi. Bir oʻlchamli panjara Z da ikki zarrachali sistemaga mos Laplas operatori $\hat{L}$ oʻz-oʻziga qoʻshma chegaralangan operator boʻlib, u kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning $\ell_2(Z\times Z)$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida beriladi

$$\hat{L}=-\frac{1}{2m_1}\Delta_1-\frac{1}{2m_2}\Delta_2,$$

bu yerda m_1, m_2 zarrachalarning massalari boʻlib, ularni biz birga teng deb hisoblay-miz, $\Delta_1=\Delta\otimes I$ va $\Delta_2=I\otimes\Delta$, Δ – ayirmali operator boʻlib, u zarrachaning bir tugundan boshqa tugunga oʻtishini ifodalaydi, biz uni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(\Delta\psi)(x)=\psi(x+2)+\psi(x-2),\quad \psi\in\ell_2(Z).$$

Bunday aniqlangan Laplasian $\ell_2(Z\times Z)$ Hilbert fazosida oʻz-oʻziga qoʻshma chegaralangan operator boʻladi. Ikki zarrachali sistema Laplasianining koordinat koʻrinishidan uning impuls koʻrinishiga oʻtish Furye almashtirishi deb ataluvchi akslantirish orqali amalga oshiriladi.

$$F: L_2(T^2)\to\ell_2(Z^2),\quad (Ff)(n,m)=\frac{1}{2\pi}\int_{T^2}e^{int+ims}f(t,s)\,dt\,ds,$$

bu yerda $L_2(T^2)=L_2(T)\otimes L_2(T)$, $L_2(T)$ – sonlar oʻqida aniqlangan 2π davrli va $T=[-\pi,\pi]$ da kvadrati bilan Lebeg maʼnosida integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi.

Ikki zarrachali Laplasianning impuls tasviri oʻz-oʻziga qoʻshma chegaralangan operator sifatida $L_2(T^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi

$$L=F^{-1}\hat{L}F\ .$$

$$(Lf)(k_1,k_2)=(\varepsilon(k_1)+\varepsilon(k_2))f(k_1,k_2)\ ,$$

$\varepsilon(q)=\cos 2q$ - alohida olingan zarrachaning $q\in T$ momentdagi impulsi.

Ikki zarrachali Laplasian L unitar operatorlar gruppasi

$$(U_s f)(k_1,k_2)=e^{-is(k_1+k_2)}f(k_1,k_2),\qquad f\in L_2(T^2)$$

bilan oʻrin almashinuvchi boʻlganligi uchun u $\{L(k),\ k\in T\}$ operatorlar oilasining toʻgʻri integraliga yoyiladi [5-6] , yaʼni $L=\int_T\oplus L(k)dk$, bu yerda

$$L(k): L_2(T)\to L_2(T), \qquad (2)$$

$$(L(k)f)(p)=\varepsilon_k(p)f(p),\qquad \varepsilon_k(p)=2\cos k\cos 2p, \qquad (3)$$

Shuni aytib oʻtamizki, $L(k)$ operator har bir $k \in T$ da $L_2(T)$ fazoda chegaralangan va simmetrik operator operatorlardir.

$L(k)$ **operatorning invariant qism fazolari.** $L_2(T)$ fazoni toq funksiyalardan va juft funksiyalardan iborat

$L_2^-(T) = \{f \in L_2(T): f(-p) = -f(p)\}$ va $L_2^+(T) = \{f \in L_2(T): f(-p) = f(p)\}$

qism fazolarning toʻgʻri yigʻindisiga yoyish mumkin, yaʼni $L_2(T) = L_2^-(T) \oplus L_2^+(T)$.

1-teorema. $L_2^-(T)$ va $L_2^+(T)$ qism fazolar $L(k)$ operatorning invariant qism fazolari boʻladi.

Isbot. $L_2^-(T)$ fazodan ixtiyoriy f^- element olamiz. Bu elementga $L(k)$ operator taʼsirini qaraymiz: $(L(k)f^-)(p) = 2\cos k \cos 2p\, f^-(p)$. f^- toq funksiya boʻlganligi uchun uning juft funksiya $2\cos k \cos 2p$ ga koʻpaytmasi toq funksiya boʻladi. Demak, ixtiyoriy $f^- \in L_2^-(T)$ uchun $L(k)f^- \in L_2^-(T)$ ekan. Bu esa $L_2^-(T)$ qism fazoning $L(k)$ operatorga nisbatan invariant qism fazo ekanligini bildiradi. Juft funksiyalar koʻpaytmasi juft ekanligidan, ixtiyoriy $f^+ \in L_2^+(T)$ uchun

$(L(k)f^+)(p) = 2\cos k \cos 2p\, f^+(p)$

ning juft funksiya ekanligini olamiz, yani $L(k)f^+ \in L_2^+(T)$.

Navbatdagi invariant qism fazolarni bayon qilish uchun biz $L_2^-(T)$ va $L_2^+(T)$ fazodagi ortonormal bazis $\left\{\varphi_n^-(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\}_{n=1}^{\infty}$ va $\left\{\varphi_0^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi_n^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt\right\}_{n=1}^{\infty}$ lardan foydalanamiz. $L_2^-(T)$ va $L_2^+(T)$ azolarning har birini quyidagicha toʻgʻri yigʻindiga yoyamiz:

$$L_2^-(T) = L_2^{-t}(T) \oplus L_2^{-j}(T) \quad \text{va} \quad L_2^+(T) = L_2^{+t}(T) \oplus L_2^{+j}(T). \qquad (4)$$

Bu yerda $L_2^{-t}(T)$ bilan $\{\varphi_1^-, \varphi_3^-, \ldots, \varphi_{2n-1}^-, \ldots\}$ sistemadan hosil boʻlgan qism fazo, $L_2^{-j}(T)$ bilan $\{\varphi_2^-, \varphi_4^-, \ldots, \varphi_{2n}^-, \ldots\}$ sistemadan hosil boʻlgan qism fazo belgilangan. Xuddi shunday $L_2^{+t}(T)$ va $L_2^{+j}(T)$ lar bilan mos ravishda $\{\varphi_1^+, \varphi_3^+, \ldots, \varphi_{2n-1}^+, \ldots\}$ va $\{\varphi_0^+, \varphi_2^+, \ldots, \varphi_{2n}^+, \ldots\}$ sistemalardan hosil boʻlgan qism fazolar belgilangan.

2-teorema. $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ va $L_2^{+j}(T)$ qism fazolar $L(k)$ operator uchun invariant qism fazolar boʻladi.

Isbot. $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ va $L_2^{+j}(T)$ qism fazolar V operator uchun invariant qism fazolar boʻlganligi uchun, ularni $H_0(k)$ operator uchun invariant qism fazolar boʻlishini koʻrsatamiz. Natijada bu qism fazolar ayirma operator $H(k) = H_0(k) - V$ uchun ham invariant qism fazolar boʻlishligi kelib chiqadi. Endi $L_2^{-t}(T)$ va $L_2^{-j}(T)$ qism fazolarning $L(k)$ operator uchun invariant qism fazolar boʻlishini koʻrsatamiz. Buning uchun $L_2^{-t}(T)$ fazoning ixtiyoriy φ_{2n-1}^- bazis elementiga $L(k)$ operatorning taʼsirini qaraymiz:

$$(L(k)\varphi_{2n-1}^-)(p) = \varepsilon_k(p)\varphi_{2n-1}^-(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos k \cos 2p \sin(2n-1)p\,.$$

Koʻpaytmani yigʻindiga keltirish

$$2\cos 2p\sin(2n-1)p=\sin[(2n-1)-2]p+\sin[(2n-1)+2]p=\sin(2n-2-1)p+\sin(2n+2-1)p$$

formulasidan foydalanib uni

$$(L(k)\varphi_{2n-1}^{-})(p)=\varepsilon_k(p)\varphi_{2n-1}^{-}(p)=\cos k[\varphi_{2n-2-1}^{-}(p)+\varphi_{2n+2-1}^{-}(p)] \qquad (5)$$

shaklda yozish mumkin, yaʼni $L(k)\varphi_{2n-1}^{-}\in L_2^{-t}(T)$ ekanligini olamiz. Bu yerda $n=1$ boʻlgan holda

$$\varphi_{2n-2-1}^{-}(p)=\varphi_{-1}^{-}(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(-p)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin p=-\varphi_1^{-}(p)\in L_2^{-t}(T)$$

ekanligini hisobga olish kerak. (5) dan istalgan $f^{-}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_{2n-1}^{-}\in L_2^{-t}(T)$ uchun

$$(L(k)f^{-})(p)=\varepsilon_k(p)f^{-}(p)=\cos k\sum_{n=1}^{\infty}c_n[\varphi_{2n-2-1}^{-}(p)+\varphi_{2n+2-1}^{-}(p)]\in L_2^{-t}(T)$$

ekanligini olamiz. Shunday qilib $L_2^{-t}(T)$ qism fazo $L(k)$ operator uchun invariant qism fazo ekan. Endi $L_2^{-j}(T)$ qism fazoning $L(k)$ operator uchun invariant qism fazo ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $L_2^{-j}(T)$ fazoning ixtiyoriy φ_{2n}^{-} bazis elementiga $L(k)$ operatorning taʼsirini qaraymiz:

$$(L(k)\varphi_{2n}^{-})(p)=\varepsilon_k(p)\varphi_{2n}^{-}(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos k\cos 2p\sin 2np\,.$$

Koʻpaytmani yigʻindiga keltirish

$$2\cos 2p\sin 2np=\sin(2n-2)p+\sin(2n+2)p$$

formulasidan foydalanib uni

$$(L(k)\varphi_{2n}^{-})(p)=\varepsilon_k(p)\varphi_{2n}^{-}(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos k\cos 2p\sin 2np=\cos k[\varphi_{2n-2}^{-}(p)+\varphi_{2n+2}^{-}(p)]$$

shaklda yozish mumkin, yaʼni $L(k)\varphi_{2n}^{-}\in L_2^{-j}(T)$ ekanligini olamiz. Bu yerdan istalgan $f^{-}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_{2n}^{-}\in L_2^{-j}(T)$ uchun

$$(L(k)f^{-})(p)=\varepsilon_k(p)f^{-}(p)=\cos k\sum_{n=1}^{\infty}c_n[\varphi_{2n-2}^{-}(p)+\varphi_{2n+2}^{-}(p)]\in L_2^{-j}(T)$$

ekanligini olamiz. Shunday qilib $L_2^{-j}(T)$ qism fazo $L(k)$ operator uchun invariant qism fazo ekan. $L_2^{+t}(T)$ va $L_2^{+j}(T)$ qism fazolarning $L(k)$ ga nisbatan invariantligi shunga oʻxshash isbotlanadi.

Yuqorida keltirilgan $L_2^{-t}(T)$, $L_2^{-j}(T)$, $L_2^{+t}(T)$ va $L_2^{+j}(T)$ qism fazolar rezolventa operator $(L(k)-zI)^{-1}$ operator uchun ham invariant qism fazolar boʻladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. P P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.Oʻ Carrol. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) 66, 016130, 9 pp. (2002).

2. J.I. Abdullaev and I.A. Ikromov. Finitness of the number of eigenvalues of the two-particle Shrodinger operator on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics, 152(3): 1299-1312 (2007).

3. Абдуллаев Ж.И., Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке, Узбекский Математический Журнал, № 1, 2005. С.3-11.

4. Абдуллаев Ж.И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на решетке, Узбекский Математический Журнал, № 3, 2009. С.3-10