ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассматривается применение скалярного произведения векторов к решению задач на нахождение углов в пространстве. В статье приведены формулы для вычисления скалярного произведения векторов и формула для вычисления косинуса угла между векторами. В статье представлена классификация видов задач, для решения которых можно применять скалярное произведение векторов, также рассмотрены алгоритмы решения задач.*

Ключевые слова: *скалярное произведение векторов, скрещивающиеся прямые, направляющий вектор, нормальный вектор, угол между скрещивающимися прямыми, угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью.*

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними, т. е.

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$$

Если векторы заданы в координатах, т. е. $\bar{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то скалярное произведение равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\bar{a}\,\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (1)$$

С помощью скалярного произведения векторов удобно решать задачи, для решения которых необходимо вычислить расстояния или углы в пространстве. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается система координат, с помощью которой находят координаты векторов, затем по формуле (1) вычисляют косинус угла между векторами.

Рассмотрим виды задач, для решения которых целесообразно использовать скалярное произведение векторов.

Угол между скрещивающимися прямыми.

Задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми вообще являются задачами повышенной сложности. Так как очень трудно представить расположение скрещивающихся прямых и тем более угол между ними.

Применение скалярного произведения векторов для решения этих задач превращает их в менее сложные задачи.

Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между их направляющими векторами. Направляющий вектор – это вектор, параллельный данной прямой. Градусная мера угла берется из промежутка [0^o; 〖90〗 ^o].

Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

Изобразить данную в задаче фигуру и прямые, угол между которыми требуется найти, выбрать на прямых направление.

Ввести прямоугольную систему координат в пространстве, выбирая начало отсчета и направление осей координат.

Найти координаты начала и конца векторов.

Найти координаты векторов.

Вычислить косинус угла между векторами по формуле (1).

Найти значение угла по значению косинуса.

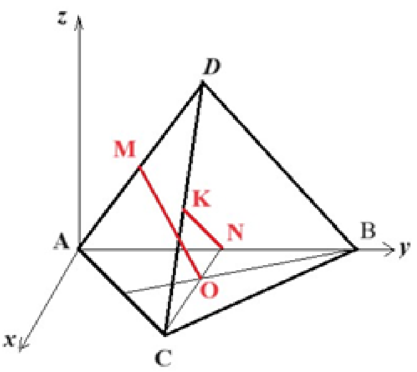
З а д а ч а 1.

В треугольной пирамиде ABCD все ребра имеют одинаковую длину. Точка M – середина ребра AD, точка O – центр треугольника ABC, точка N – середина ребра AB и точка K – середина ребра CD. Найдите угол между прямыми MO и KN.

Р е ш е н и е.

Введём прямоугольную систему координат, начало которой в вершине A. Найдем координаты векторов MO и KN.

Примем длину ребра пирамиды за единицу.



$\overline{MO}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ или $\left(1; \sqrt{3}; -2\sqrt{2}\right)$.

2) $K\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), N\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$

;

$\overline{KN}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ или $\left(\sqrt{2}; 0; 1\right)$

1) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \ O\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; 0\right)$

;

3) $\cos\varphi = \frac{|\overline{MO}\cdot\overline{KN}|}{|\overline{MO}|\cdot|\overline{KN}|} = \frac{|\sqrt{2}-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+3+8}\cdot\sqrt{2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$$\varphi = arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$$

О т в е т: $arccos\,\frac{\sqrt{2}}{6}$

Угол между плоскостями.

Задачи на нахождение угла между плоскостями также как и задачи предыдущего типа являются задачами повышенной трудности. Главная трудность при решении этих задач состоит в построении угла между плоскостями. При решении же этих задач с помощью скалярного произведения векторов необходимость построения угла отпадает, и задача из разряда сложных превращается в более простую задачу.

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Нормальный вектор – это вектор перпендикулярный плоскости.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между плоскостями:

Изобразить данную в задаче фигуру.

Ввести прямоугольную систему координат в пространстве, выбирая начало отсчета и направление осей координат.

Найти координаты нормальных векторов.

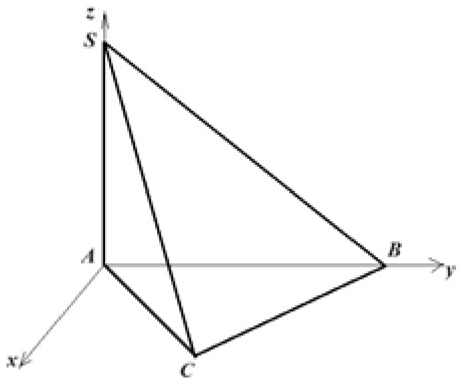
Вычислить косинус угла между нормальными векторами по формуле (1).

Найти значение угла по значению косинуса.

З а д а ч а 2.

В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, SA= $\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.

Р е ш е н и е.



Введём прямоугольную систему координат, начало которой в вершине A. Найдем координаты нормальных векторов плоскостей.

$\overline{n_1}\ (x_1; y_1; z_1)$ – нормальный вектор плоскости α.

$\overline{n_1} \perp \overline{SB}, \quad \overline{n_1} \perp \overline{AC}$

$S(0;0;\sqrt{3})$,$B(0;1;0)$;

$$\overline{SB}\left(0;1;-\sqrt{3}\right)$$

$$A(0;0;0),\qquad C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right);\ \overline{AC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)\ \text{или}\ \left(\sqrt{3};1;0\right).$$

Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0, т. е.

$$\overline{n_1}\cdot\overline{SB}=0;\ \overline{n_1}\cdot\overline{AC}=0$$

$$\begin{cases}y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ \sqrt{3}x_1+y_1=0\end{cases};\qquad \begin{cases}y_1=\sqrt{3}z_1\\ x_1=-\dfrac{y_1}{\sqrt{3}}\end{cases};\qquad \begin{cases}y_1=\sqrt{3}z_1\\ x_1=-z_1\end{cases}$$

Положим $z_1=1$, тогда $x_1=-1$, $y_1=\sqrt{3}$, т. е. $\overline{n_1}\left(-1;\sqrt{3};1\right)$.

2) $\overline{n_2}\left(x_2;y_2;z_2\right)$ – нормальный вектор плоскости β.

$\overline{n_2}\perp\overline{SC}$, $\overline{n_2}\perp\overline{AB}$

$\overline{SC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-\sqrt{3}\right)$ или $\left(\sqrt{3};1;-2\sqrt{3}\right)$; $\overline{AB}(0;1;0)$

$$\overline{n_2}\cdot\overline{SC}=0;\ \overline{n_2}\cdot\overline{AB}=0$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2-2\sqrt{3}z_2=0\\ y_2=0\end{cases};\qquad \begin{cases}x_2=2z_2\\ y_2=0\end{cases}$$

Положим $z_2=1$, тогда $x_2=2$, $y_2=0$, т. е. $\overline{n_2}\left(2;0;1\right)$.

3) $\cos\varphi=\frac{|-2+1|}{\sqrt{1+3+1}\cdot\sqrt{4+1}}=\frac{1}{5}$; $\varphi=\arccos\frac{1}{5}$

О т в е т: $\arccos\frac{1}{5}$

Угол между прямой и плоскостью.

Для нахождения угла φ между прямой m и плоскостью α применяется формула:

sin⁡φ= |n ̅· a ̅ |/(|n ̅ |·|a ̅ |) или sin⁡φ= |x_1 x_2+ y_1 y_2+z_1 z_2 |/(√(〖x_1〗 ^2+ 〖y_1〗 ^2+ 〖z_1〗 ^2) ·√(〖x_2〗 ^2+ 〖y_2〗 ^2+ 〖z_2〗 ^2)) , (2)

где n ̅ (x_1; y_1; z_1) – нормальный вектор к плоскости α,

a ̅ (x_2; y_2; z_2) – направляющий вектор прямой m.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

Изобразить данную в задаче фигуру, прямую и плоскость, угол между которыми требуется найти, выбрать на прямой направление.

Ввести прямоугольную систему координат в пространстве, выбирая начало отсчета и направление осей координат.

Найти координаты начала и конца направляющего вектора.

Найти координаты направляющего вектора.

Найти координаты нормального вектора для плоскости.

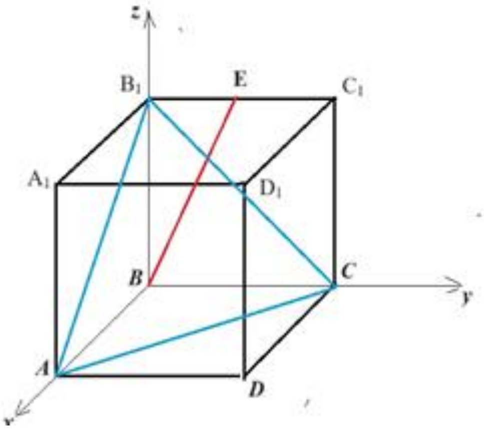
Вычислить синус угла между векторами по формуле (2).

Найти значение угла по значению синуса.

З а д а ч а 3.

В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 рёбра AB и AA1 равны 1, а ребро AD = 2. Точка E – середина ребра B1C1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB1C.

Р е ш е н и е.



Введём прямоугольную систему координат, начало которой в вершине B.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;0;0)$, $B_1(0;0;1)$, $C(0;2;0)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -y-2z-2(x-1) = -2x-y-2x+2=0$$

Уравнение плоскости AB_1C имеет вид: $2x+y+2z-2=0$.

Значит нормальный вектор к этой плоскости имеет координаты $\bar{n}\ (2;1;2)$.

Найдем направляющий вектор прямой BE.

$B(0;0;0)$, $E(0;1;1)$; $\overline{BE}\ (0;1;1)$

Найдем угол между вектором $\overline{BE}$ и нормалью к плоскости по формуле скалярного произведения векторов (2):

$$\sin\varphi = \frac{|1\cdot1+2\cdot1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \varphi = 45^0.$$

О т в е т: 45^0.

Знание координатно-векторного метода решения стереометрических задач поможет быть использовано при решении олимпиадных задач, а также на вступительных экзаменах. При решении задач по стереометрии традиционным методом уже на первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картинку. Поэтому такое решение задачи занимает очень много времени как на поиск решения, так и на его реализацию. А с помощью координатно-векторного метода задачу можно решить легко и просто по определенному алгоритму.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А. Г., Пинский А. И./Под ред. В. И. Благодатских. – М. Наука, 1989.

Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. – М.: Мир и образование, 2013.

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975.