ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ БИР НОМАЪЛУМЛИ МОДУЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Атаматов Бахтиёр Ахмаджонович
Фарғона "Темурбеклар мактаби" ҳарбий академик лицейи математика фани ўқитувчиси

Бир номаълумли параметрга боғлиқ модулли тенгламалар.

Соннинг модули (ёки абсолют қиймати) умумий ўрта таълим мактаб дастурига киритилишига қарамасдан, у билан боғлиқ бўлган мисолларни ечишда баъзи ўқувчилар хатоликка йўл қўйишади. Чунки, модулли ифода модулдан қутилиш жараёнида модул остидаги ифоданинг ишорасига боғлиқлиги, шунингдек, модулли тенгламанинг ечимини аниқлашда модул-дан қутилиш учун қўйилган шартларни эътиборга олиш зарурлигини кўпчилик ўқувчилар чалкаштириб қўйишади. Агар модулли тенглама параметрга боғлиқ бўлса, уни ечишда бир неча хусусий ҳолларни алоҳида таҳлил қилиш ҳам ўқувчилар учун мураккаб масалалар қаторига киради. Қуйида биз модулли тенгламалар ва параметрга боғлиқ бўлган модулли тенгламаларнинг баъзиларини ечиш тўғрисида тўхталиб ўтмоқчимиз.

Айтайлик, берилган тенглама бир номаълумли биринчи даражали бўлиб, унда модул остидаги ифодаларни нолга айлантирувчи номаълумнинг қийматлари аниқланган бўлсин. Фараз қилайлик, модулларни нолга айлантирувчи 3 та, a_1, a_2, a_3 қийматлар мавжуд бўлсин ва улар $a_1 < a_2 < a_3$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда, бу нуқталар сонлар ўқини 4 қисмга ажратади: $(-\infty, a_1]; (a_1, a_2], (a_2, a_3], (a_3, \infty)$. Шу билан бирга, ҳар бир оралиқнинг ички қийматларида модуллар остидаги ифодалар бир ҳил ишорали бўлади. Шунинг учун, берилган масаланинг ҳар бир оралиқдаги ечимлари модулдан қутилиш орқали ечилади ва тенгламанинг ечими оралиқдаги ечимлар бирлашмаси сифатида аниқланади.

Модулли тенглама параметрга боғлиқ бўлса, тенгламадаги модул остида берилган ифодаларни нолга айлантирувчи номаълумнинг қийматлари параметрга боғлиқ бўлиши мумкин.

Масалан,

$|3x-4| - |2x+3a| + |ax-1| = a+3$ тенгламада $x_1 = \frac{4}{3},\ \ x_2 = -\frac{3}{2}a,\ \ x_3 = \frac{1}{a}\ \ (a \neq 0)$.

Модул остидаги ифодаларни 0 га айлантирувчи номаълумнинг қийматлари a параметрга боғлиқ бўлиб, бу нуқталар билан аниқланадиган оралиқлар a нинг мусбат ёки манфий қийматлар қабул қилишига боғлиқ бўлади. Агар

$\frac{3}{4} > a > 0$ бўлса, оралиқлар $\left(-\infty, -\frac{3}{2}a\right], \left(-\frac{3}{2}a, \frac{4}{3}\right], \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{a}\right], \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$ кўринишда бўлади.

Агар $a=\frac{3}{4}$ бўлса, оралиқлар $\left(-\infty,-\frac{9}{8}\right],\left(-\frac{9}{8},\frac{4}{3}\right],\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ кўринишда, агар $a>\frac{3}{4}$ бўлса, оралиқлар $\left(-\infty,-\frac{3}{2}a\right],\left(-\frac{3}{2}a,\frac{1}{a}\right],\left(\frac{1}{a},\frac{4}{3}\right],\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ кўринишда бўлади. $a<0$ бўлган ҳолда ҳам ҳудди юқоридагидек мулоҳаза юритиш орқали оралиқларни аниқлаш ва ҳар бир оралиқларга мос тенглама ечимини модулдан қутилиш усули билан ечиш мумкин. Демак, параметрга боғлиқ модулли тенгламаларни ечишда параметр олиши мумкин бўлган хусусий ҳоллар алоҳида кўрилиши керак.

Агар $a=0$ бўлса, тенглама $|3x-4|-|2x|+1=3$ кўринишга келади ва оралиқлар $(-\infty,0],(0,\frac{4}{3}],(\frac{4}{3},\infty)$ кўринишда бўлади.

Мисоллар 1. $|ax-1|-a=3$.

Ечиш. Тенгламада $a\geq-3$ тенгсизлик бажарилиши керак, акс ҳолда, тенглама зиддиятни ифодалайди. Демак, $a<-3$ шартда тенглама ечимга эга эмас. Ҳудди шунингдек, $a=0$ да тенглама ечимга эга эмас.

Модул ичидаги ифодани 0 га айлантирувчи қиймат $\frac{1}{a}$ га тенг (бу ерда $a\neq0$). Бу нуқта билан сонлар ўқи икки қисмга бўлинади: $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right],\left(\frac{1}{a},\infty\right)$.

I ҳол. $x\in\left(-\infty,\frac{1}{a}\right]$. Бу ҳолда тенглама $-(ax-1)-a=3$ кўринишга келади, ёки

$-ax=2+a,\ x_1=-\frac{2+a}{a}$.

Бу қиймат $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$ оралиқда бўлиш шартини аниқлаймиз: $\frac{1}{a}+\frac{2+a}{a}=\frac{3+a}{a}$.

$\frac{3+a}{a}\geq0$ бўлиши учун $a\geq0$ тенгсизлик бажарилиши керак. $a<-3$ тенгсизлик бажарилса ҳам $\frac{3+a}{a}\geq0$ ўринли, лекин бу ҳолда юқорида кўрганимиздек, тенгламанинг ечими йўқ. $a=-3$ бўлса, $x=-\frac{1}{3}$ келиб чиқади, демак $a\in(0,\infty)$ шартда тенгламанинг ечими $x_1=-\frac{2+a}{a},\quad a=-3$ бўлса, $x_2=-\frac{1}{3}$.

II ҳол $x\in\left(\frac{1}{a},\infty\right)$. Бу ҳолда тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин: $ax-1-a=3$. Бундан $ax=4+a$, демак, $x_2=\frac{4+a}{a}$ бўлади.

Бу топилган қийматнинг $\left(\frac{1}{a},\infty\right)$ оралиқда бўлиш шартини топамиз.

$\frac{4+a}{a}-\frac{1}{a}>0 \quad \frac{3+a}{a}>0$.

Жавоб: $a\in(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ да $\varnothing$, $a=-3$ да $x=-\frac{1}{3}$, $a\in(0,\infty)$ да $x_1=-\frac{2+a}{a}$; $x_2=\frac{4+a}{a}$.

Машқлар.

1. $2|x+a|-|x-2a|=3a$. 2. $a-\frac{2a^2}{|x+a|}=0$. 3. $|x^2-a^2|=(x+3a)^2$.

4. $|x+3a|-|x-a|=2a$. 5. $x=2|x-a|-2|x-2a|$.

Бир номаълумли параметрга боғлиқ модулли тенгсизликлар.

Бир номаълумли модулли тенгсизликларни ечишда дастлаб модулдан “қутилиш”, яъни берилган модулли тенгсизликни унга эквивалент бўлган модул қатнашмаган тенгсизликлар системалари билан алмаштириш зарур. Бунда модул остидаги ифоданинг манфий ёки мусбат қиймат қабул қилишга қараб бир ёки бир неча ҳолларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқиш зарур. Агар тенгсизликда параметр қатнашса, бундай ҳоллар сони янада ортади. Рўй бериши мумкин бўлган ҳолларнинг барчасини эътиборга олиш ва алоҳида система қуриш ва уни ечиш зарур. Масаланинг ечими барча ҳоллар орқали ҳосил қилинган системалар ечимларининг бирлашмаси сифатида аниқланади.

Мисоллар 1. $|x-2a|-|x|<2a$.

Ечиш. Тенгсизликда $a=0$ бўлса, 0<0 кўринишдаги зиддият ҳосил бўлади. $a>0$ бўлганда $2a>0$ ва $a<0$ бўлганда $2a<0$ бажарилади. Шунинг учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

$$\begin{cases}a=0\\0<0\end{cases};\begin{cases}a<0\\-\infty<x<2a\\-(x-2a)+x<2a\end{cases};\begin{cases}a<0\\2a\le x<0\\x-2a+x<2a\end{cases};\begin{cases}a<0\\0<x\\x-2a-x<2a\end{cases};\begin{cases}a>0\\-\infty<x<0\\-(x-2a)+x<2a\end{cases};$$

$$\begin{cases}a>0\\0\le x<2a\\-(x-2a)-x<2a\end{cases};\begin{cases}a>0\\2a\le x<+\infty\\(x-2a)-x<2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\x\in\varnothing\end{cases};\begin{cases}a<0\\-\infty<x<2a;\\2a<2a\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<0\\2a\le x<0;\\x<2a\end{cases}\begin{cases}a<0\\x>0\\-2a<2a\end{cases};\begin{cases}a>0\\-\infty<x<0;\\2a<2a\end{cases}\begin{cases}a>0\\0\le x\le 2a;\\-2x<0\end{cases}\begin{cases}a>0\\2a<x<\infty\\-2a<2a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\x\in\varnothing\end{cases};\begin{cases}a<0\\-\infty<x<2a;\\x\in\varnothing\end{cases}\begin{cases}a<0\\2a<x<0;\\x<2a\end{cases}\begin{cases}a<0\\x>0\\0<4a\end{cases};$$

$$;\begin{cases}a>0\\-\infty<x<0;\\0<0\end{cases}\begin{cases}a>0\\0\le x\le 2a;\\-2x<0\end{cases}\begin{cases}a>0\\2a<x<\infty\\0<2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\x\in\varnothing\end{cases};\begin{cases}a<0\\x\in\varnothing\end{cases};\begin{cases}a>0\\x>0\end{cases}$$

Жавоб: $a \le 0 \Rightarrow \varnothing$, $a > 0 \Rightarrow x \in R_+$.

2. $|x-2a| + |x+a| \le 2a$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. Агар $a=0$ бўлса, $x=0$ ечим бўлади. Агар $a<0$ бўлса, берилган тенгсизлик зиддиятни ифодалайди. Агар $a>0$ бўлса, $2a > -a$ бажарилади. Шунинг учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $x \in (-\infty, -a]$;

2) $x \in (-a, 2a]$;

3) $x \in (2a, \infty)$.

Ҳар бир ҳолда берилган тенгсизликни ечамиз.

$$1)\ \begin{cases} a>0 \\ -\infty < x \le -a \\ -(x-2a)-(x+a) \le 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \le -a \\ -2x \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \le -a \\ x \ge -\dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \in \varnothing \end{cases}.$$

$$2)\ \begin{cases} a>0 \\ -a < x \le 2a \\ -(x-2a)+x+a \le 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ -a < x \le 2a \\ 3a \le 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \in \varnothing \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} a>0 \\ 2a \le x < +\infty \\ x-2a+x+a \le 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \ge 2a \\ 2x \le 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \ge 2a \\ x \le \dfrac{3a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ x \in \varnothing, \end{cases}$$

Жавоб: a нинг ҳар қандай 0 дан фарқли қийматида тенгсизлик ечимга эга эмас, $a=0$ да эса $x=0$ бўлади.

Машқлар. Параметрли тенгсизликларни ечинг:

1. $|x-a^2| > 2a^2$; 2. $|x-3a| < |x-a| - 2a$; 3. $|x-2a| + |x-a| < 3x$;

4. $|x+2a| < \dfrac{8a^2}{|x-2a|}$; 5. $a + \dfrac{4a^2}{|x-2a|} \ge 0$.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Наймарк М.А. Теория представлений групп. М. Наука 1976 560 с.
2. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. М. Наука 1985 144 с.
3. Муминов К.К. Характеризация вполне приводимых представлений алгебр Ли. Евразийский математический журнал, Астана, 2006, N3, с.68-77.