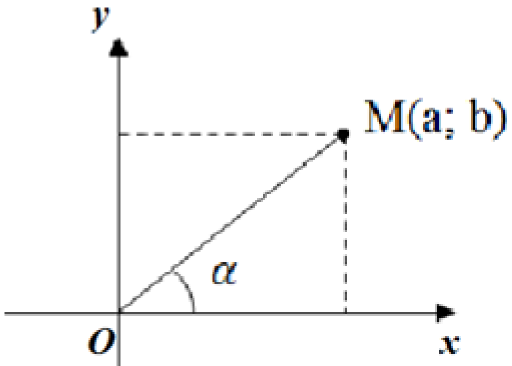
KOMPLEKS SONNI GEOMETRIK TASVIRLASH. KOMPLEKS SONNING TRIGONOMETRIK SHAKLDA YOZILISHI

Akbarova Shaxlo Sodikovna
O'zbekiston Respublikasi Ichki ishlar vazirligining 2-son Toshkent akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada kompleks sonni geometrik tasvirlash va uni trigonometrik shaklda yozish haqida ma'lumot berilgan va misollar orqali kengroq yoritilgan.*

Kalit sozlar: *kompleks son kompleks sonning moduli kompleks sonning argumenti kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi.*

$z = a + bi$ kompleks sonni geometrik tasvirlash uchun oxy to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasidan foydalanamiz. Bunda ox o'qida a birlikni, oy o'qida b birlikni ajratib ularning oxirlaridan o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Ular o'zaro kesishib $M(a; b)$ nuqtani hosil qiladi. Bu nuqta z kompleks sonning tekislikdagi geometrik tasviri bo'ladi. Demak, har bir kompleks songa tekislikda bitta nuqta mos kelar ekan va aksincha tekislikdagi har bir M nuqtaga bitta kompleks son mos keladi (1-chizma). Bu esa kompleks sonlar to'plami bilan tekislik nuqtalari orasida bir qiymatli moslik borligini anglatadi. Shunday qilib, oxy tekislikni kompleks sonlar tekisligi deb qarash mumkin ekan.



1-chizma

Koordinatalar boshi O nuqta bilan M nuqtani birlashtiruvchi OM kesma uzunligi r ga z kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ kabi belgilanadi.

Pifagor teoremasiga asosan,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ bo'lishi ravshan.

OM vektor bilan Ox o'qi orasidagi α burchakka z kompleks sonning argumenti deyiladi va $argz$ kabi belgilanadi. Demak, $0 \leq argz \leq 2\pi$. 1-chizmadan ko'rinadiki,

$cos\alpha = \frac{a}{r}$, $sin\alpha = \frac{b}{r}$ yoki $tg\alpha = \frac{b}{a}$

bo'lib, bular yordamida kompleks sonning argumentini topish mumkin. Ulardan $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$ ifodalarga ega bo'lib, bundan esa $z = a + bi$ kompleks sonni

$$z = rcos\alpha + irsin\alpha = r(cos\alpha + sin\alpha)$$

ko'rinishda yozish mumkinligini aniqlaymiz. Kompleks sonning bu ko'rinishiga uning trigonometrik shakli deyiladi. Kompleks sonning bunday ko'rinishda yozilishi bir qator qulayliklarga olib keladi.

Aytaylik $Z_1 = r_1(cos\alpha_1 + sin\alpha_1)$ va $Z_2 = r_2(cos\alpha_2 + sin\alpha_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Bu yerda $r_1 = |Z_1|$, $r_2 = |Z_2|$, $\alpha_1 = argZ_1$ va $\alpha_2 = argZ_2$. U holda $Z_1 \cdot Z_2$ va $\frac{Z_1}{Z_2}$ lar quyidagicha aniqlanadi.

$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + isin(\alpha_1 + \alpha_2)]$;

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + isin(\alpha_1 - \alpha_2)]$.

Trigonometrik shakldа berilgan $Z = r(cos\alpha + isin\alpha)$ kompleks son uchun Z^n va $\sqrt[n]{z}$ larni quyidagicha aniqlash mumkin:

$Z^n = r^n(cosn\alpha + isinn\alpha)$; $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + isin\frac{\alpha+2k\pi}{n})$

Bu formulalar Muavr formulalari deyiladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1.$Z_1 = 5$; $Z_2 = -3i$; $Z_3 = 3 + 2i$; $Z_4 = 5 - 2i$; $Z_5 = -3 + 2i$; $Z_6 = -1 - 5i$ sonlarni tekislikda tasvirlang.

Yechish: $Z_1 = 5$ ni $Z_1 = 5 + 0i$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $a = 5, b = 0$ bo'lib, berilgan sonning geometrik tasviri $M_1(5; 0)$ nuqtadan iborat.

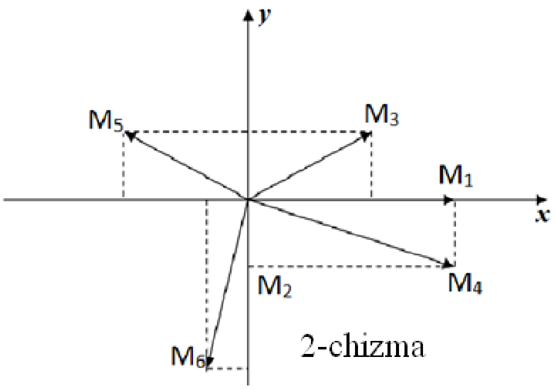
$Z_2 = -3i$ ni $Z_2 = 0 - 3i$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $a = 0$, $b = -3$ bo'lib, berilgan sonning geometrik tasviri $M_2(0; -3)$ nuqtadan iborat bo'ladi.

$Z_3 = 3 + 2i$ da $a = 3$, $b = 2$ bo'lgani uchun uning geometrik tasviri $M_3(3; 2)$ nuqtadan iborat bo'ladi.

$Z_4 = 5 - 2i$ da $a = 5$, $b = -2$ bo'lgani uchun uning geometrik tasviri $M_4(5; -2)$ nuqtadan iborat bo'ladi.

$Z_5 = -3 + 2i$ da $a = -3$, $b = 2$ bo'lgani uchun uning geometrik tasviri $M_5(-3; 2)$ nuqtadan iborat.

$Z_6 = -1 - 5i$ da $a = -1$, $b = -5$ bo'lgani uchun uning geometrik tasviri $M_6(5; -2)$ nuqta bo'ladi (2-chizma).



2-chizma

2. $Z = 1 - i$ kompleks sonning moduli va argumenti topilsin.

Yechish:Bu yerda $a = 1, b = -1$ bo'lganligi uchun $r = |z| =$

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ kelib chiqadi. bo'lib, $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'lishi ravshan. Bu tenglamalar $[0; 2\pi)$ oralig'ida yagona $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ yechimga ega.

3.$Z = 1 + i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

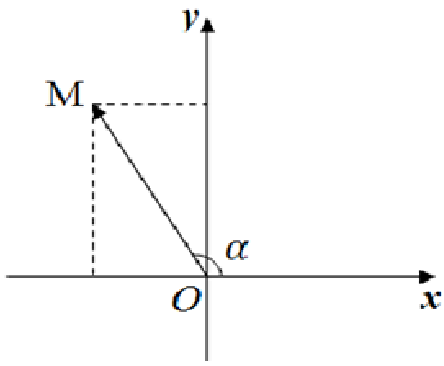
Yechish: $a = 1, b = 1$ bo'lganligi uchun $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ va $sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'lib, bu munosabatlardan $\alpha = 45°$ ni topamiz. Demak, $r = \sqrt{2}$ va $\alpha = 45°$ yoki $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bo'lgani uchun $Z = 1 + i = r(cos\alpha + isin\alpha) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$.

4.$Z = -2 + 2i\sqrt{3}$ kompleks sonni trigonometrik shaklda tasvirlang.

Yechish: Bu yerda $= -2$, $b = 2\sqrt{3}$ bo'lganligi uchun $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$.

$Z = -2 + 2i\sqrt{3}$ kompleks sonni geometrik shaklda tasvirlaymiz (3-chizma).



3-chizma

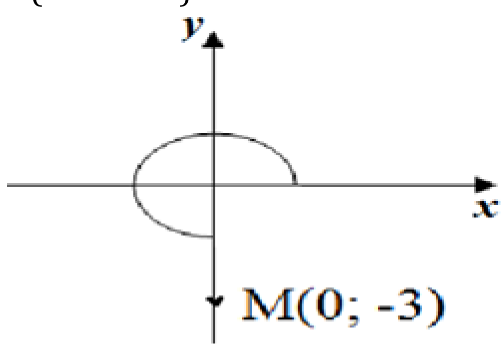
$cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, $sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bu munosabatlarga $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ burchak mos keladi. Demak,

$Z = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. $Z = -3i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish: $Z = -3i = 0 - 3i$ bo'lganligi uchun $a = 0$, $b = -3$ bo'ladi. $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. $Z = -3i$kompleks sonni geometrik shaklda tasvirlaymiz (4-chizma).



4-chizma

Berilgan kompleks sonning argumenti $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ga teng. Demak,

$Z = -3i = 0 - 3i = 3\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$.

6. $Z_1 = 3(cos\,330° + isin\,330°)$ va $Z_2 = 2(cos\,60° + isin\,60°)$ kompleks sonlar berilgan. $Z_1 \cdot Z_2$; $\frac{Z_1}{Z_2}$; Z_2^4; $\sqrt[3]{Z_1}$, lar topilsin.

Yechish: 1)

$Z_1 \cdot Z_2 = 3(cos\,330° + isin\,330°) \cdot 2(cos\,60° + +isin\,60°) = 6\big[(\cos(330° + 60°) + isin\,(330° + 60°)\big) == 6(cos\,390° + isin\,390°) = (cos\,30° + isin\,30°)$.

Demak, $Z_1 \cdot Z_2 = 6(cos30^0 + sin30^0) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3\big(\sqrt{3} + i\big) == 3\sqrt{3} + 3i$.

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(cos330^0 + sin330^0)}{2(cos60^0 + sin60^0)} = \frac{3}{2}(cos270^0 + sin270^0) = \frac{3}{2}(0 - i) == -\frac{3}{2}i$.

3) $Z_2^4 = [2(cos60^0 + isin60^0)]^4 = 2^4 \cdot (cos240^0 + isin240^0) == 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\left(-\frac{1}{2}\right)\big(1 + \sqrt{3}i\big) = -8\big(1 + \sqrt{3}i\big) = -8 - 8\sqrt{3}i$.

4) $\sqrt[3]{Z_1} = \sqrt[3]{3}(cos\frac{330^0 + 360^0 \bullet k}{3} + sin\frac{330^0 + 360^0 \bullet k}{3})$ bo'lib,

$k = 0$ da $(z_1)_1 = \sqrt[3]{3(}cos110^0 + isin110^0)$;

$k = 1$ da $(z_1)_2 = \sqrt[3]{3(}cos230^0 + isin230^0)$;

$k = 2$ da $(z_1)_3 = \sqrt[3]{3(}cos350^0 + isin350^0)$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI:

1. Azizxodjayeva N.N. Pedagogik texnologiyalar va pedagogik mahorat. – T.: Moliya, 2003. -192 –b.

2. Tolipov O`. Q. , Usmonboyeva M. Pedagogiktexnologiyalarning tadbiqiy asoslari. – T.: Fan , 2006. – 247-b.

3. Mirsoliyeva M.T. Pedagogika kollejlarida o`quv – tarbiya jarayonini modernizatsiyalash(metidik qo`llanma). –T.: Nizomiy nomidagi TDPU.-2011. -11-15-b, 22-25-b, 41-44-b73-75-b.

4. Yunusov A.S. Yunusova D.I. Matematikaning dolzarb hazariy muammolari. –T.: Nizomiy nomidagi TDPU.-2002.-3-8-b.

5.Alimov va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. O`rta maktabning 10-11-sinflari uchun darslik. –T.: O`qituvchi 1994.

6. Abduraxmonov.A.U. va boshq. Algebra va matematik analiz asoslari II-qism. Akademik litseylar uchun o`quv qo`llanma. –T.:2000.

7. F. Usmonov, R. Isomov, B. Xo`jayev. Matematikadan qo`llanma. –T.: "Yangi asr avlodi" 2006.