ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

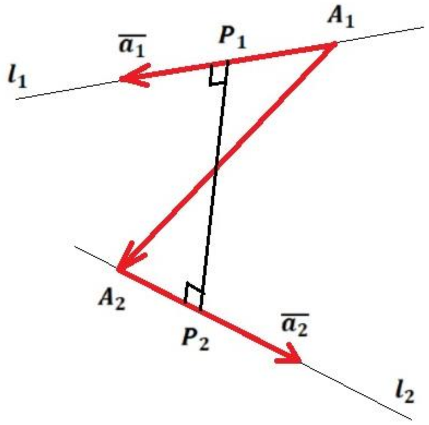
Аннотация: *В данной статье рассматривается способ нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми с использованием скалярного произведения векторов, представлена формула для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми и алгоритм решения задач методом координат. Представленный в статье способ показан на примерах.*

Ключевые слова: *скалярное произведение векторов, скрещивающиеся прямые, расстояние между скрещивающимися прямыми.*

Две прямые называются *скрещивающимися,* если они не пересекаются и не лежат в одной плоскости. *Расстоянием* между двумя скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.

Задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми относятся к задачам повышенной трудности. Основная трудность заключается в построении общего перпендикуляра прямых, длина которого и является расстоянием между скрещивающимися прямыми. Применение скалярного произведения векторов позволяет значительно облегчить решение таких задач, так как построение общего перпендикуляра прямых при таком способе решения не обязательно. И вообще, при решении задач с помощью координатно-векторного способа достаточно построить схематический чертёж, в то время, как при решении задач традиционным геометрическим методом необходимо точное построение чертежа, т. к. от правильности построения чертежа зависит успех поиска решения задачи.

Выведем формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми.



Пусть l_1 и l_2 – данные скрещивающиеся прямые, $A_{1,} A_2$ –произвольные точки прямых l_1 и l_2,

$\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2, $\overline{A_1A_2} = \overline{m}$,

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, т. е. длину

их общего перпендикуляра $\overline{P_1P_2}$ ($P_1 \in l_1, P_2 \in l_2$), представим вектор $\overline{P_1P_2}$ в виде $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2P_2} = x\,\overline{a_1} + \overline{m} + y\,\overline{a_2}$. Неизвестные коэффициенты находятся из условий перпендикулярности вектора $\overline{P_1P_2}$ векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$:

$$\begin{cases}(x\,\overline{a_1} + y\,\overline{a_2} + \overline{m}) \cdot \overline{a_1} = 0\\ (x\,\overline{a_1} + y\,\overline{a_2} + \overline{m}) \cdot \overline{a_2} = 0\end{cases}$$

Искомое расстояние – длина вектора $\overline{P_1P_2}$, $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x\,\overline{a_1} + y\,\overline{a_2} + \overline{m})^2}$.

Если задача решается с помощью метода координат, то расстояние между скрещивающимися прямыми находится по формуле:

$$d = \frac{|\overline{A_1A_2} \cdot \overline{n}|}{|\overline{n}|} \qquad (1)$$

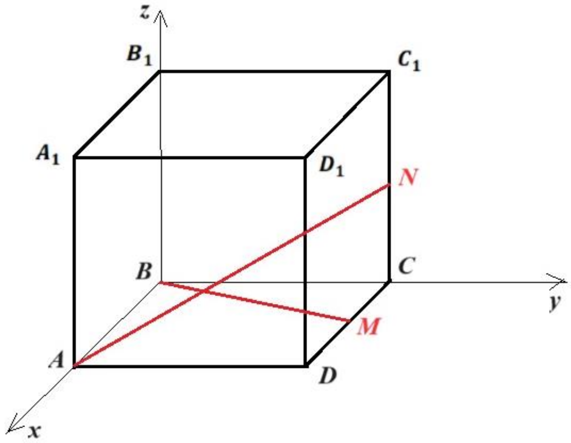
где $A_{1,} A_2$ – произвольные точки скрещивающихся прямых, $\overline{n}$ – вектор перпендикулярный скрещивающимся прямым l_1 и l_2

Алгоритм решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми:

1. Изобразить данную в задаче фигуру и прямые, расстояние между которыми требуется найти.
2. Ввести прямоугольную систему координат в пространстве, выбирая начало отсчета и направление осей координат.
3. Найти координаты вектора, начало которого лежит на одной из скрещивающихся прямых, а конец на другой прямой.
4. Найти координаты направляющих векторов скрещивающихся прямых.
5. Найти координаты вектора $\overline{n}$, перпендикулярного скрещивающимся прямым, используя свойство скалярного произведения векторов (если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю).
6. Найти расстояние по формуле (1).

З а д а ч а 1.

Дан куб с основанием ABCD и боковыми ребрами $AA_1, BB_1, CC_1, DD_{1.}$ Длины всех рёбер куба равны единице. Точки M и N – середины CD и CC_1 соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM



1) Введем прямоугольную систему координат, начало которой в вершине В. Расстояние между прямыми AN и BM вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|\overline{AB} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}$$

$$\bar{n} \perp \overline{AN}, \qquad \bar{n} \perp \overline{BM}$$

2) Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AN}$ и $\overline{BM}$.

$$A(1; 0; 0), \quad B(0; 0; 0), \quad N\left(0; 1; \frac{1}{2}\right), \quad M\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$$

$\overline{AB}(-1; 0; 0), \overline{AN}\left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$ или $(-2; 2; 1)$, $\quad \overline{BM}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ или $(1;\ 2;\ 0)$

3) Найдем координаты вектора $\bar{n}\ (x; y; z)$.

$\begin{cases} \bar{n} \perp \overline{AN} = 0 \\ \bar{n} \perp \overline{BM} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2y \\ z = -6y \end{cases}$.

$\bar{n}\ (-2y; y; -6y)$ или $\bar{n}\ (-2; 1; -6)$.

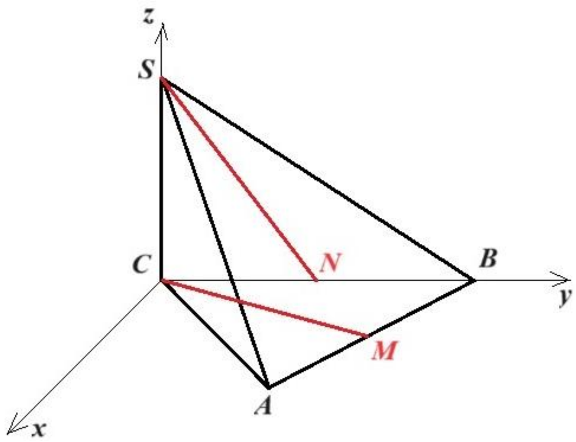
4) $d = \frac{|\overline{AB} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{-1\cdot(-2)+0\cdot1+0\cdot(-6)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-6)^2}} = \frac{2}{\sqrt{41}}$

О т в е т: $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

З а д а ч а 2.

Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Р е ш е н и е.



1) Введем прямоугольную систему координат, начало которой в вершине C. Расстояние между прямыми SN и CM вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|\overline{CS}\ \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}$$

$$\bar{n}\ \perp \overline{SN}, \qquad \bar{n}\ \perp \overline{CM}$$

2) Найдем координаты векторов $\overline{CS}$, $\overline{SN}$ и $\overline{CM}$.

$$S(0;0;2),\ \ C(0;0;0),\ \ N\left(0;2\sqrt{2};\ 0\right),\ \ M\left(\sqrt{6};3\sqrt{2};0\right)$$

$$\overline{CS}(0;0;2), \overline{SN}\left(0;2\sqrt{2};\ -2\right) \text{ или } \left(0;\sqrt{2};-1\right),$$

$$\overline{CM}\left(\sqrt{6};3\sqrt{2};0\right) \text{ или } \left(\sqrt{3};\ 3;\ 0\right)$$

3) Найдем координаты вектора $\bar{n}\ (x;y;z)$.

$$\begin{cases} \bar{n} \perp \overline{SN} = 0 \\ \bar{n} \perp \overline{CM} = 0 \end{cases};\ \begin{cases} \sqrt{2}y - z = 0 \\ \sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} z = \sqrt{2}y \\ x = -\sqrt{3}y \end{cases}.$$

$\bar{n}\left(-\sqrt{3}y;y;\sqrt{2}y\right)$ или $\bar{n}\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{2}\right)$.

4) $d = \frac{|\overline{CS}\cdot\bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3+1+2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

О т в е т: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А. Г., Пинский А. И./Под ред. В. И. Благодатских. – М. Наука, 1989.

2. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. – М.: Мир и образование, 2013.

3. Ионин Ю. И., Некрасов В. Б. Вычисление расстояний и углов/ Квант, 1987, №1.

Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). – М.: Наука, 1984.