РАВНОМЕРНО ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ И УСЛОВИЯ ТИПА ПРОДУКТИВНОСТИ

Ходжамуратова И.А
(Доцент института ТМС Ташкент)

Аннотация: *В этой статье рассмотрено свойства равномерно вычислимо отделимых алгебр и доказано, что существование собственное расширение продуктивных множеств.*

Ключивые слова: *Равномерно вычислимая алгебра, продуктивность, полупродуктивность, вычислимость, эффективное множество.*

Понятие равномерно вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике. Так, А.И. Мальцевым было показано [5], что всякая позитивная нумерация конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является разрешимой, что поставило вопрос о справедливости данного утверждения в общем случае (без условия конечной порожденности). Оказалось, что имеются контрпримеры, причем именно в классе равномерно вычислимо отделимых алгебр. Более того, всякая позитивная нумерация алгебры со счетной (в частности, нетеровой) решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой. Другой пример - проблема Бергстры-Такера [6] в теории абстрактных типов данных о существовании инициального в конечно-базируемом многообразии обогащения для любой конечно порожденной позитивно представимой алгебры. Отрицательное решение этой проблемы было получено предъявлением примера конечно порожденной алгебры, имеющей равномерно вычислимо отделимую позитивную нумерацию с иммунной трансверсалью. Важнейшими среди равномерно вычислимо отделимых алгебр являются негативные. Можно также отметить вычислимую отделимость стандартных нумераций конечно порожденных и финитно аппроксимируемых алгебр [4].

Как обычно, всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует алгоритм ее вычисления. Подмножество ω называется вычислимым, если вычислима его характеристическая функция [1]. Эти определения естественным образом обобщаются на многоместные функции и подмножества декартовых степеней ω. Подмножество ω называется эффективным, если оно является областью значений подходящей вычислимой функции [2].

Равносильно (и менее формально), множество эффективно, если оно

порождается некоторым алгоритмом. Это определение также естественным образом обобщается на многоместные отношения.

Важно отметить, что всякое вычислимое множество является эффективным, в то же время фундаментальным фактом теории алгоритмов является существование эффективных невычислимых множеств.

Определение 1. Множество A *продуктивно,* если существует частично – рекурсивная функция ψ, такая, что $(\forall x)\left[W_x \subset A \Rightarrow \left[\psi(x) \textit{определено} \,\&\, \psi(x) \in A - W_x\right]\right]$. Функция ψ называется *продуктивной функцией* для A. (Термин «продуктивный» принадлежит Деккеру.) [1].

Определение 2. Нумерованная алгебра (A, ν) называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция f трех переменных, обладающая следующим свойством: если $x \neq y(mod\,ker(\nu))$, то $\lambda z.\, f(x, y, z)$ –всюду определенная вычислимая функция, являющаяся характеристической для $\ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего x от y. [4].

Неформально, равномерность вычислимой отделимости означает наличие эффективной процедуры, ''выдающей'' для каждой пары $\langle x, y\rangle$ при $x \neq y(mod\,ker(\nu))$ алгоритм разрешения $\ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего x от y.

Известно ([6]), что нумерованная алгебра равномерно вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными алгебрами. При этом важно отметить, что равномерная аппроксимируемость позволяет не просто равномерно вычислять перечислимые индексы соответствующих различающих негативных конгруэнций, но и равномерно эффективно предъявлять их характеристические индексы (т.е. алгоритмы, позволяющие различать любые различные элементы исходной алгебры).

Определение 3. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется полупродуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция ψ, что для всякого $W_x \subseteq \alpha$ значение $\psi(x)$ определено и $W_x \subseteq W_{\psi(x)} \subseteq \alpha \wedge W_{\psi(x)} \setminus W_x \neq \emptyset$.

Хорошо известно, что класс полупродуктивных множеств является собственным расширением класса продуктивных множеств ([2]).

Как обычно, через W_x (R_x, Γ_x) обозначается перечислимое множество (разрешимое множество, конечное множество) с номером x в постовской нумерации перечислимых множеств (клиниевской нумерации частичных вычислимых функций, стандартной нумерации конечных множеств). Отметим, что далеко не для всякого x функция R_x является характеристической для некоторого множества. [1].

Определение 4. Множество α называется вычислимо-продуктивным, если существует такая вычислимая частичная функция ψ, что для всякого разрешимого множества $R_x \subseteq \alpha$, заданного своим характеристическим индексом x, значение $\psi(x)$ определено и $\psi(x) \in \alpha \setminus R_x$.

Функцию ψ из определения 2 назовем вычислимо-продуктивной для α.

Предложение 1. Всякое полупродуктивное множество является вычислимо-продуктивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha -$полупродуктивное с полупродуктивной функцией ψ и разрешимое множество R_x, заданное своим характеристическим индексом, является подмножеством α. Равномерно эффективно перейдем от *x* к перечислимому индексу множества R_x, скажем, $R_x = W_y$, и построим $W_{\psi(y)}$ такое, что $W_y \subseteq W_{\psi(y)} \subseteq \alpha$ (все включения собственные). Используя характеристический индекс *x* множества W_y найдем такое первое z в перечислении множества $W_{\psi(y)}$, что $z \in W_{\psi(y)} \setminus R_x$. Этот элемент z объявляем значением вычислимо-продуктивной функции для α. Предложение доказано.

Предложение 2. Всякое перечислимое неразрешимое множество является вычислимо-продуктивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если α перечислимо и неразрешимо, то для всякого его разрешимого подмножества R_x, заданного характеристическим индексом *x*, верно $\alpha \setminus R_x \neq \emptyset$. Найдем первый элемент в пересчете α, но вне R_x и объявим этот элемент значением вычислимо-продуктивной функции множества α. Предложение доказано.

Следствие 1. Класс вычислимо-продуктивных множеств является собственным расширением класса полупродуктивных множеств.

Напомним, что множество называется эффективно бесконечным, если оно бесконечно и не иммунно.

Предложение 3. Всякое вычислимо-продуктивное множество является эффективно бесконечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha -$вычислимо-продуктивное, то, начав с любого его конечного подмножества, заданного своим характеристическим индексом, получим новый элемент из α, но вне этого подмножества. Эффективная итерация этого процесса позволяет построить бесконечное перечислимое подмножество исходного множества α. Предложение доказано.

Предложение 4. Всякое бесконечное разрешимое множество эффективно бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Следствие 2. Класс эффективно бесконечных множеств является собственным расширением класса вычислимо-продуктивных множеств.

Обозначим через $\Pi, Semi - \Pi, Comp - \Pi, Eff - Inf$ классы продуктивных, полупродуктивных, вычислимо-продуктивных и эффективно бесконечных множеств, соответственно.

Теорема 1. $\Pi \subset Semi - \Pi \subset Comp - \Pi \subset Eff - Inf$. Все включения собственные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложений 1 – 4. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Перевод с английского, под ред. В.А. Успенского, М., ''Мир'', 1972, 624 с.
2. Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. Перевод с английского, под ред. М.М. Арсланова, Казанское математическое общество, Казань, 2000, 576 с.
3. Касымов Н.Х. Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами. Сибирский матем.журн., Т.34, № 5, 1993, 85-102.
4. Касымов Н.Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры. Успехи матем.наук, Т.51, № 3, 1996, 145-176.
5. Мальцев А.И. Конструктивные алгебры I. Успехи мат. наук, 1961, 16, №3, 3-60.
6. Bergstra J.A., Tucker J.V. A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method. Lecture Notes in Comput.Sci., 1980, №85, p.76-90.