EVKLID VA LOBACHEVSKIY GEOMETRIYALARINI QIYOSIY TAHLILI

Xushmurodova Zebiniso Uyg'un qizi
Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika Universiteti "Aniq va tabiiy fanlarni o'qitish metodikasi (matematika)" yo'nalishi 2-kurs magstranti;
Davletov Davronbek Egamberganovich.
Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika Universiteti fizika-matematika fakulteti "Algebra, geometriya, matematik analiz" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

Annotatsiya:*Ushbu maqolada Evklid, Lobachevskiy va Riman geometriyalarini qiyoslash orqali matematika, xususan geometriya kursida aksiomalarga tayanish mumkinligi yoritib berilgan. Shu bilan birga matematikaning rivojlanish tarixidagi muhim faktlar keltirib o'tilgan.*

Kalit so'zlar: *Aksioma, teorema, ta'rif, isbot, yuza, metod.*

Evklid oʻzigacha boʻlgan matematika sohasidagi bilimlarni sistemaga soldi va birinchi boʻlib geometriyani arifmetikadan, planametriyani stereometriyadan prinsipial ajratib berdi.

Evklidning "Negizlar" asaridan maʼlum boʻladaki geometriya fani aniq tushunchalar bilan ish koʻradi. Geometriyadagi hamma tushunchalarni ikki kategoriyaga ajratsa boʻladi, yaʼni asosiy tushunchalar va hosilaviy tushunchalar (asosiy tushunchalar vositasida taʼriflanadigan tushunchalar). Masalan, biz biror yangi tushunchaga taʼrif berish uchun undan oldingi tushunchaga asoslanamiz, oʻz navbatida bu tushuncha ham oʻzidan oldingi tushunchaga asoslanadi. Ammo, bu ketma–ketlik cheksiz davom etishi mumkin emas, balki qandaydir tushunchalar asosiy boshlangʻich tushuncha qilib olinishi kerakki, bu tushunchalarning mazmuni hech bir taʼrifga asoslanmasligi kerak.

Bizgacha yetib kelgan toʻliq matematik asarlardan e.o. IV asrga oid boʻlgan Evklid, Arximed, Appoloniy asarlaridir. Bularda matematika ilmiy fan sifatida shakllanib boʻlgan edi.

Bizgacha toʻliq saqlanib kelgan Xioslik filosof Gippokratning matematik asaridir. Bu asar matematik mulohazalarning etarlicha toʻliqligi va nazariy masalalarni koʻtarilishi bilan ahamiyatga molikdir. Bunda:

1. Ikkita doira yoylari bilan chegaralangan yaproqlarning yuzini hisoblash.
2. Oʻxshash doiraviy segmentlar yuzalarining nisbati, ularni tortib turuvchi vatarlar kvadratlarining nisbati kabi.
3. Uchburchak tengsizligi va Pifagor teoremasi.
4. Antik davrining asosiy muammolari burchakni uchga boʻlish, kubni ikkilantirish, doirani kvadratlash haqida ma'lumotlar boʻlib, aksiomatikani dastlabki qadamlari qoʻyildi, mantiqiy xulosa chiqarish printsipi qoʻllanildi.

Pifagoriylar arifmetika sohasida:

1. Ular sonlarni juft–toq, tub va murakkab, mukammal, qoʻshaloq, uchburchakli, kvadratli, beshburchakli va hakozo sinflarga ajratganlar. Hozirgi koʻrinishlar ulardan meros.

2. Muntazam koʻpyoqlarning va muntazam koʻpburchaklarning xossalari.

3. Tekislikni muntazam uchburchaklar, toʻrtburchaklar, oltiburchaklar sistemasi bilan qoplash usuli, fazoni esa – kublar sistemasi bilan qoplash usulini bilganlar.

4. Pifagor teoremasining isboti.

5. a:b=b:c – oʻrta geometrikni oʻrganish natijasida oʻzaro oʻlchamsiz kesmalarning, ya'ni irratsionallikni kashf etganlar.

Ilohiy sonlar bir va ikkining oʻrta geometrigi nimaga tengligini izlash kvadratning tomoni bilan diagonali orasidagi munosabatga olib keladi, bu esa ularning tushunchasidagi ratsional son bilan ifodalanmasligi – irratsionallikga olib keladi

Ratsional sonlar bilan bir qatorda irratsional sonlar uchun ham yaroqli boʻlgan matematik nazariyani yaratishga boʻlgan urinish natijasida geometrik algebra nomi bilan yangi yoʻnalish yaratildi. Ammo geometrik algebraning kamchiligi shundan iborat boʻlib qoldiki, chizgʻich va sirkul yordamida yechish mumkin boʻlmagan masalalar ham etarlicha ekan. Bunday masalalar turkumiga:

Kubni ikkilantirish;

Burchakni teng uchga boʻlish;

Doirani kvadratlash va boshqalar kiradi.

1. Kubni ikkilantirish, ya’ni hajmi berilgan kub hajmidan ikki marta katta boʻlgan kubni yasash. Berilgan kub qirrasi a ga teng boʻlsin, u holda yangi kub qirrasini x desak, masala x3=2a3 tenglamani echishga, yoki $\sqrt[3]{2}$ kesmani yasashga keladi. Uyida Xioslik Gippokrat (e.o. V asr oʻrtasi) tomonidan tavsiya etilgan usul bilan tanishaylik. U masalani umumiyroq qilib qoʻyadi, ya’ni parallelopipeddan kub hosil qilish. Buni u ikkita oʻrta proportsionalni topish masalasiga olib keladi.

Bizga V=a1b1c1 parallelopiped berilgan boʻlsin. Uni asosi kvadrat boʻlgan yangi parallelopipedga V=a2b ga keltirilgan boʻlsin. Endi buni x3=a2b kubga oʻtkazamiz. Izlangan kubning qirrasi Gippokratga koʻra a:x=x:y=y:b proportsiyadan aniqlangan. Buning uchun x2=ay, xy=ab va y2=bx koʻrinishdagi geometrik oʻrinlar tekshirilgan va ular (a va b lar) shu geometrik oʻrinlarning kesishish nuqtasining koordinatalarini oʻrta proportsianalini topish koʻrinishida hal qilgan. Bu esa konus kesimlari koʻrinishida hal boʻladigan masaladir.

Boshqa koʻrinishda Eratosfen kubni taqriban ikkilantiradigan qurilma (mezolabiy) yasagan.

Muammoning bundan keyingi taqdiri haqida 1637–yilda Dekart bu masalani yechish mumkinligiga shubha bildiradi. 1837–yilda Vantselb bu masalani uzil–kesil qal qiladi, ya’ni kubik irratsional sonlar ratsional sonlar toʻplamiga ham va uni kvadrat irratsionallik bilan kengaytirilgan toʻplamiga ham tegishli emasligini isbotlaydi. Demak, masalani chizgʻich va sirkul yordamida hal qilib boʻlmas ekan.

1. Burchakni uchga boʻlish.

Antik davrning ikkinchi mashhur masalasi bu ixtiyoriy burchakni geometrik algebra usullari bilan teng uchga bo‘lishdir. Bu masala ham oldingisi kabi uchinchi darajali tenglamani echishga keltiriladi, ya’ni $a=4x3-3x$ yoki trigonometrik ko‘rinishda $\cos\varphi = 4\cos^3(\varphi/3) - 3\cos(\varphi/3)$.

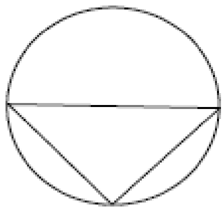
3. Uchinchi masala–yuzi kvadrat yuziga teng bo‘lgan doirani topish. Doiraning yuzi πr^2, kvadrat yuzi $x2$. U holda $\pi r^2 = x^2$, $\sqrt{\pi} r = x$ bo‘lib, π ning arifmetik tabiati ochilmaguncha bu muammo qam echimini kutib turdi. Faqat XVIII asrga kelib I. Lambert va A. Lejandrlar π ratsional son emasligini isbotladilar. 1882 yilda Lindemon π ni transtsendent son ekanligini, ya’ni u xech qanday butun koeffitsentli algebraik tenglamaning ildizi bo‘la olmasligini isbotladi.

Albatta antik matematiklar bularni bilmaganlar. Ular muammoni hal qilish davomida ko‘plab yangi faktlarni va metodlarni kashf qildilarki, shubhasiz bular matematikani rivojlantirish uchun katta hissa qo‘shdi. Ba’zi xususiy hollar uchun muammoni hal qilishga erishdilar. Jumladan, Gippokrat masalasi:

1. Diametrga tiralgan va radiusi $\sqrt{2}$ ga teng yaproqcha. Bunda yaproqcha yuzi diametri D gipotenuza vazifasini bajaruvchi teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchak *ACB* yuziga teng, ya’ni:

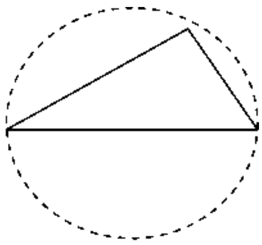
$$S_{ADByaproqcha} = S_{ACB}$$

ACB–to‘g‘ri burchakli uchburchak.

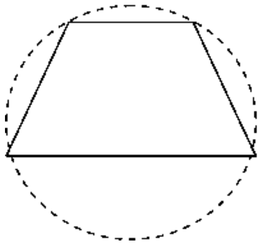


2. Uchburchak tomonlarini diametr qilib *C* aylanalar yasalgan. U holda katetlarga tiralgan yaproqchalar yuzalarining yig‘indisi *ACB* uchburchak yuziga teng, ya’ni:

SAEB+SBCF = SABC



3. Tomonlari 1, 1, 1, $\sqrt{3}$ bo‘lgan trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana, $\sqrt{3}$ tomonni esa vatar qilib, boshqa 3 ta segmentga o‘xshash segment yasaymiz. Natijada hosil bo‘lgan yaproqcha yuzi trapetsiya yuziga teng, ya’ni:



1–rasm

SADCByaproqcha=SABCDtrapetsiya.

Bunda Gippokrat "O'xshash segmentlar yuzalarining nisbati ular tiralgan diametrlar nisbatining kvadratiga proportsional" degan teoremaga asoslangan. Bunday yaproqlar soni qancha degan savolga javob ochiqligicha qolaveradi. 1840 yilda nemis matematigi Klauzen yana 2 ta yaproqcha topadi. Bu yechimi ochiq turgan masalaga XX asrda sovet matematiklari Chebotarev va Dorodnovlar tomonidan to'liq javob topildi, ya'ni agar yaproqchalarning tashqi va ichki yoylarining burchak qiymatlari o'zaro o'lchamli bo'lsa, u holda masala echimga ega, aks holda yo'q. Shunga ko'ra $\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{1},\frac{5}{3}$ bo'lib, boshqa yaproqchalar kvadratlanmaydi.

Masalaning qo'yilishining o'ziyoq bizda uni chizg'ich va sirkul yordamida hal qilib bo'lmasligini anglatadi.

Konkret masalalarni yechishda abstraktlash, bir xil tipdagi masalalarni echish natijasida matematikani rang–barangligi va mustaqilligi oshkora bo'la boshladi. Bu faktlar matematik bilimlarni sistemalashtirish va uning asoslarini mantiqiy ketma–ketlikda bayon etish zaruriyatini qo'ydi. Bu vazifani muvaffaqiyatli hal qilishda Aristotelning falsafiy dunyoqarashlari, hamda mantiq fanining yutuqlari katta rol o'ynadi. Bu davrga kelib fikrlashning asosiy formalari shakllangan, sistemalashgan va ilmiy ishlab chiqarilgan bo'lib, deduktiv fan qurishning asosiy printsiplari ilgari surilgan edi. Bu printsipga ko'ra mantiqan murakkablashib boruvchi fan aksiomalar sistemasi asosida qurilishi kerak. Matematika esa aynan shunday fan edi.

Shundan so'ng matematika "Negizlar" ko'rinishida aynan deduktiv metod asosida yaratila boshladi. Biz shulardan eng mashhur asari bilan tanishaylik. Evklidning o'zi Aristotel printsipi asosida kitob yozishni maqsad qilib qo'ygan bo'lsa kerak, natijada esa matematik bilimlar entsiplopediyasi vujudga keladi.

Negizlar 13 ta kitobdan iborat. Bularning har birida teoremalar ketma– ketligi bor.

I – kitob: ta'rif, aksioma va postulatlar berilgan.Boshqa kitoblarda faqat ta'riflar uchraydi (2–7,10,11).

Ta'rif – bu shunday jumlaki, uning yordamida avtor matematik tushunchalarni izohlaydi. Masalan: " nuqta bu shundayki, u qismga ega emas" yoki "kub shunday jismki, u teng oltita kvadrat bilan chegaralangan".

Aksioma – bu shunday jumlaki, uning yordamida avtor miqdorlarning tengligi va tengsizligini kiritadi. Jami aksiomalar 5 ta bo'lib, bular Evdoks aksiomalar sistemasidir:

1. a=b, b=c => a=c ;

2. a=b, c=>a + c =b+c;

3. a=b, c=>a –c = b – c

4. a=b => b = a;

5. Butun qismdan katta.

Pastulat–bu shunday jumlaki, uning yordamida geometrik yasashlar tasdiqlanadi va algoritmik operatsiyalar asoslanadi. Jami postulatlar beshta:

1. har qanday ikki nuqta orqali toʻgʻri chiziq oʻtkazish mumkin.
2. Toʻgʻri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.
3. har qanday markazdan istalgan radiusda aylana chizish mumkin.
4. hamma toʻgʻri burchaklar teng.
5. Agar bir tekislikda yotuvchi ikki toʻgʻri chiziq uchinchi toʻgʻri chiziq bilan kesilsa va bunda ichki bir tomonli burchaklar yigʻindisi 180° dan kichik boʻlsa, u holda toʻgʻri chiziqlar shu tarafda kesishadi.

Endi “Boshlangʻichlar” ning mazmuni bilan tanishaylik.

I – VI kitoblar planametriyaga bagʻishlangan.

VII – IX kitoblar arifmetikaga bagʻishlangan.

X– kitob bikvadrat irratsionalliklarga solishtirilmaydigan sonlarga bagʻishlangan.

XI– XII kitoblar stereometriyaga bagʻishlangan.

A.N. Kolmogorov “Hozirgi zamon matematikasida oʻrganiladigan barcha xilma–xil tuzilishlarni egallab olish uchun biron nazariyaning, unga mos qilib olingan dastlabki aksiomalarining koʻrinishi, oʻzgarishiga qarab roʻyobga chiqadigan rivojlanish imkoniyatlarini sistematik ravishda yordam beradigan aksiomatik metodni bilish zarur” (История математики, Россия, Наука, М. 1968, 264 с.)

Parallellik aksiomasi ishtirok etmagan aksiomalarga asoslanib koʻrilgan geometriya maxsus nom bilan “absolyut” geometriya deb ataladi.

Ikkinchi toifa teoremalarga parallellik aksiomasi ishtirokisiz isbot qilib boʻlmaydigan teoremalar kiradi. Evklid geometriyasining bu teoremalari Lobachevskiy va Riman geometriyasida bajarilmaydi. Ammo, Evklid geometriyasining ikkinchi toifa teoremalariga Lobachevskiy geometriyasida uning parallellik aksiomasidan kelib chiqadigan teoremalar mos keladi. Riman geometriyasida esa hamma vaqt ham bunday boʻlavermaydi, chunki bu geometriyada parallellik tushunchasi umuman yoʻq.

Ba’zi teoremalarning Evklid, Lobachevskiy va Riman geometriyalarida ifodalanishi

Evklid geometriyasida	Uchburchak ichki burchaklarining yigindisi 2*d* ga teng.	Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklarining yigindisiga teng.	To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzasining yarmiga teng.	Tomonlari mos ravishda parallel bo‘lgan burchaklarning ikkalasi ham o‘tkir yoki ikkalasi ham o‘tmas bo‘lsa, ular bir– biriga teng bo‘ladi.	To‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 4*d* *ga* teng	To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlari kvadratlarining yigindisiga teng.
Lobachevskiy geometriyasida	Uchburchak ichki burchaklarining yigindisi *2d* dan kichik.	Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklari yig‘indisidan katta.	To‘g‘ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzaning yarmidan katta.	Tomonlari mos ravishda parallel bo‘lgan burchaklar teng emas.	To‘rtburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 4*d* dan kichik.	To‘g ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indisi dan katta

Riman geometriyasida	Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi *2d* dan katta	Uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shni bo'lmagan ikkita ichki burchaklari yigindisidan kichik.	To'g'ri burchakli uchburchakning 30° li burchagi qarshisida yotgan kateti gipotenuzaning yarmidan kichik.	Parallel to'g'ri chiziqlar mavjud emas	To'rtburchak ichki burchaklarining yig'indisi 4*d* dan katta.	To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati katetlar kvadratlarining yig'indisidan kichik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A.YA.Narmanov, A.S.SHaripov Geometriya asoslari. T.Universitet, 2004 y.
2. N.V.Efimov. Вусшая геометрия M., 1978 y.
3. A.V.Pogorelov. geometrii. M., Nauka, 1968 y.
4. Dadajonov N.D, Yunusmetov R, Abdullayev T.