

УДК 517.956.6

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Акбарова С.Х

Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан

Акбарова М.Х

Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммеда ал

Хорезми, Ташкент, Узбекистан

³Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

Шамшидинов М.Н

Аннотация: Работа посвящена к изучению одной нелокальной краевой задачи для смешанного эллиптико-параболического уравнения с двумя линиями и различными порядками вырождения. Единственность решения поставленной задачи доказана с помощью принципа экстремума, а при доказательстве существования решения используются метод интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, краевая задача, регулярное решение, линия вырождения, интегральное уравнение.

Исследуем нелокальная краевая задача для уравнения

$$0 = \begin{cases} y^{m+1} u_{xx} - x^{n_1} u_y, & x > 0, \\ y^m u_{xx} + (-x)^{n_2} u_{yy}, & x < 0, m, n_i = \text{const} (i = \overline{1,2}) \end{cases} \quad (1)$$

в конечной области Ω , ограниченной отрезками OA , AB , BB_0 прямых $y = 0$, $x = h_1$, $y = h$ при $x > 0$, $y > 0$ и гладкой кривой

$$\sigma : \frac{1}{q_2} (-x)^{2q_2} + \frac{1}{p_2} y^{2p_2} = 1$$

с концами в точках $A_0(-h_2, 0)$, $B_0(0, h)$ и отрезком A_0O прямой $y = 0$ при $x < 0$, $y > 0$. Здесь $O = O(0, 0)$, $A = A(h_1, 0)$, $B = B(h_1, h)$;

$$h_1 = (2q_1)^{1/q_1}, h_2 = q_2^{1/q_2}, h = p_2^{1/p_2}, 2q_1 = n_1 + 2, 2q_2 = n_2 + 2, 2p_2 = m + 2,$$

причем

$$m > 0, n_1 > n_2 > m. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения

$$\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < h_1, 0 < y < h\}, \Omega_2 = \{(x, y) : -h_2 < x < 0, 0 < y < h\},$$

$x = \mu(y)$ - заданная функция из класса $C^1[0, h]$, причем $0 \leq \mu(y) \leq h$.

Определение. Функция $u(x, y) \in C^{2,1}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, определенная в области Ω , и обращающая уравнения (1) в тождество, называется регулярным решением этого уравнения.

З а д а ч а Т В. Определить функцию $u(x, y)$, со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;
- 2) $u(x, y)$ - регулярное в области Ω решение уравнения (1);
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq h_1, \quad (3)$$

$$u(h_1, y) + \theta(y)u(\mu(y), y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u|_{\sigma} = \psi_1(s), \quad 0 < s < l, \quad (5)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi_2(x), \quad -h_2 < x < 0, \quad (6)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\theta(y)$, $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x)$, $\theta(y)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(x) \in C(0 \leq x \leq h_1) \cap C^2(0 < x < h_1), \quad (7)$$

$$\varphi_2(y) \in C[0, h] \cap C^2(0, h), \quad (8)$$

$$\theta(y) \in C[0, h] \cap C^2(0, h), \quad (9)$$

$$\varphi_1(h_1) = \varphi_2(0), \quad \theta(0) = 0,$$

а функция $\psi_1(x, y)$, имеет вид

$$\psi_1(x, y) = xy\overline{\psi}_1(x, y), \quad \overline{\psi}_1(x, y) \in C(\overline{\sigma}). \quad (10)$$

Краевые задачи для эллиптико-параболического уравнения смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения изучены в работах Салахитдинова М.С. и его учениками. Отметим работы [1-3].

Имеет место следующий п р и н ц и п э к с т р е м у м а: при выполнении условия

$$|\theta(y)| \leq 1, \quad (11)$$

и $\varphi_2(y) = 0$, решение $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ задачи Т В свой положительный максимум и отрицательный минимум достигает лишь на $\overline{\sigma} \cup [0, h_1]$.

Т е о р е м а. Если выполняется условие (2), (11), то задача Т В имеет единственное решение.

Единственность решения поставленной задачи непосредственно следует из принципа экстремума. А существование решения при определенных ограничениях на порядки линии вырождения эквивалентно сведется к вопросу о разрешимости

системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения // ДАН РУ, 1992. - №12. – С.3-5.
2. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. ТГПУ.- Т.: MUMTOZ SO'Z, 2009. 264.
3. Akbarova M. Kh. Akbarova S. Kh. Solvability of boundary value problem with a conormal derivative for an equation of mixed elliptic-parabolic type // Andijan State University Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research, 2020/ №1, pp. 44-50.