УДК 517.927.2

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН 4-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Д.У.Жўраева
ТАТУ Фарғона филиали

Аннотация: *Ушбу мақолада иккинчи тартибли сингуляр коэффициентли бир оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масала қўйилган ва тадқиқ этилган. Ушбу масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган.*

Аннотация. *В статье исследована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом. Доказана единственность и существование решения рассматриваемой задачи.*

Annotation. *In the article boundary value problem was investigated for second order ordinary differential equation with singular coefficients. The uniqueness and existence of the solution of the considered problem was proved.*

Калит сўзлар: *чегаравий масала, иккинчи тартибли дифференциал тенглама, сингуляр коэффициент, ягона ечим, ечим мавжудлиги.*

Ключевые слова: *краевая задача, дифференциальное уравнение второго порядка, сингулярный коэффициент, единственность решения, существование решения.*

Keywords: *boundary value problem, second order differential equation with singular coefficients, uniqueness of the solution, existence of the solution.*

Масаланинг қўйилиши. $D=\{(x,0);\ 0\le x\le p\}$ соҳада

$$y''+\frac{2\gamma}{x}y'+\sqrt{\lambda}y=f(x),\qquad x\in(0,p) \tag{1}$$

дифференциал тенгламани ва

$$\lim_{x\to 0}x^{2\gamma}y'(x)=k_1,\qquad y'(p)=k_2 \tag{2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ функция топилсин. Бу ерда $f(x)$ - берилган узлуксиз функция, k_1 ва k_2-берилган ҳақиқий сонлар.

Теорема. *Агар* $0<\gamma<\frac{1}{2}$, *ва* $J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $\{(1),(2)\}$ *масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. Масала ечимининг ягоналиги. Фараз қиламиз масала иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. Уларнинг айирмасидан тузилган

$$y(x)=y_1(x)-y_2(x) \qquad (3)$$

функция $[0;p]$ сегментда

$$y''+\frac{2\gamma}{x}y'+\sqrt{\lambda}y=0, \qquad x\in(0,p) \qquad (1')$$

дифференциал тенгламани ва

$$\lim_{x\to 0}x^{2\gamma}y'(x)=0, \qquad y'(p)=0 \qquad (2')$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Маълумки, $(1')$ тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right). \qquad (4)$$

кўринишда топилади.

(4) ечимни $(2')$ шартларга бўйсундирамиз. $(2')$ шартнинг биринчисига асосан $C_1=0$,

$(2')$ шартнинг иккинчисига асосан эса

$$y'(p)=\left[C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}\sqrt{\lambda}J_{-1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)-C_2\sqrt{\lambda}x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]\Bigg|_{x=p}=$$

$$=C_2\sqrt{\lambda}p^{1/2-\gamma}J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)=0,$$

Теорема шартига асосан $J_{\frac{1}{2}+\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\neq 0$ бўлгани учун охирги тенгликдан $C_2=0$ эканлиги келиб чиқади. Бундан $\{(1'),(2')\}$ бир жинсли масаланинг ечими $y(x)\equiv 0$ бўлишини топамиз. Бу эса, (3) тенгликка асосан, $y_1(x)=y_2(x)$ бўлишини, яъни $\{(1),(2)\}$ масала ечимга эга бўлса, у ягона бўлишини билдирди.

Масала ечимининг мавжудлиги. Маълумки, (1) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \qquad (6)$$

кўринишда топилади.

Энди (1) тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланимиз. Бунинг учун (6) ифодадаги C_1 ва C_2 ўзгармасларни x ўзгарувчиларга боғлиқ функция деб хисоблаб, уни

$$y(x)=C_1(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \qquad (7)$$

кўринишда ёзиб оламиз. (7) ни (1) тенгламага қўйиб $C_1'(x)$ ва $C_2'(x)$ ларга нисбатан

$$\begin{cases} C_1'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)=0, \\ C_1'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2'(x)x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}f(x) \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу ердан $C_1'(x)$ ва $C_2'(x)$ ларни бир қийматли топиб, сўнгра уларни $[0;x]$ сегментда интеграллаб, $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни топамиз:

$$C_1(x)=\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x t^{\gamma+1/2}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)f(t)dt+C_1,$$

$$C_2(x)=\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x t^{\gamma+1/2}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)f(t)dt+C_2.$$

Буларни (7) га қўйиб, (1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y(x)=C_1x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2x^{\frac{1}{2}-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+$$

$$+\frac{\pi x^{1/2-\gamma}}{2\cos\gamma\pi}\int_0^x\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right]t^{1/2+\gamma}f(t)dt. \quad (8)$$

(8) ечимни (2) шартларга бўйсиндириб, (1) тенгламанинг (2) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимини

$$y(x)=k_1\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2-\gamma}\frac{J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{1/2+\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)+J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{-1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}{J_{1/2+\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}+$$

$$-\frac{k_2}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{x}{p}\right)^{1/2-\gamma}\frac{J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}+\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\int_0^p G(x,t)t^{2\gamma}f(t)dt$$

кўринишда топамиз. Бу ерда,

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)}{J_{1/2+\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}(xt)^{\frac{1}{2}-\gamma}\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)+J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)J_{-\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\right], \\ \qquad 0\le t\le x, \\ \dfrac{J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{J_{1/2+\gamma}\left(\sqrt{\lambda}p\right)}(tx)^{\frac{1}{2}-\gamma}\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}t\right)J_{\gamma+1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)+J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)J_{-\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda}p\right)\right], \\ \qquad x\le t\le p.\end{cases}$$

Теорема тўла исботланди.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Ж.Н.Ватцон. Теория бесселовых функции. -Т. 1. -М.: Изд. ИЛ, 1949. -798 с.

2. Н.Лебедов. Специальные функции и их приложения. -Москва, 1963. -359 с.

3. А.Қ.Ўринов. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона 2012 й. -112 б.

4. М.С.Азизов, Д.У. Қобилжонова. Иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган сингуляр коэффициентли бир оддий дифференциал тенглама учун 3-чегаравий масала. “XXI асрда илм-фан тараққиётининг ривожланиш истиқболлари ва уларда инновацияларнинг тутган ўрни” мавзусидаги Республика илмий 2-онлайн конференцияси. http//tatqiqot.uz/conf/ – 2019. 317-318 б.

5. Maniyozov, O., Bozorqulov, A., & Isomiddinova, O. (2023). TA’LIM JARAYONIDA BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHIMINI MAPLE DASTURIDA TOPISH. *Farg ‘ona davlat universiteti ilmiy jurnali*, (1), 190-202.

6. Botirova, N., & Alimjanova, M. (2022). TALABALARNING OQUV-BILISH FAOLIYATLARINI TASHKIL ETISH. *Евразийский журнал социальных наук, философии и культуры*, *2*(12), 65-72.

7. Dadakhon, T., & Sabohat, A. (2022). Developing Creative Thinking through Primary School Students Solving Problems. *European Multidisciplinary Journal of Modern Science*, *6*, 71-76.

8. Otaqulov, O., Nasriddinov, O., & Isomiddinova, O. (2023). TA’LIM JARAYONIDA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHIMINI MAPLE DASTURIDA TOPISH. *Scientific journal of the Fergana State University*, (1), 1-1.

9. Maniyozov, O., Bozorqulov, A., & Isomiddinova, O. (2023). TA’LIM JARAYONIDA BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHIMINI MAPLE DASTURIDA TOPISH. Farg ‘ona davlat universiteti ilmiy jurnali, (1), 190-202.

10. Tolipov, N., Xudoynazarov, Q., & Munavarjonov, S. (2023). ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУШАРЕ. Research and implementation.

11. Tolipov, N., Isaxonov, X., & Zunnunov, M. (2023). SHAR TASHQARISIDAGI SOHA UCHUN GARMONIK DAVOM ETTIRISH MASALASI. Research and implementation.

12. Saidov, M. S. (2011). Possibilities of increasing the efficiency of Si and CuInSe 2 solar cells. Applied Solar Energy, 47, 163-165.

13. Saidov, M. (2023). NORMAL SHAKLLAR. MUKAMMAL NORMAL SHAKLLAR. Research and implementation