ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной статье рассматривается применение аналитической геометрии, в частности, метода координат к решению планиметрических задач, на примерах показано преимущество координатного метода при решении некоторых задач. В статье представлена классификация видов задач, для решения которых полезна аналитическая геометрия, также рассмотрены этапы решения задач методом координат и перечислены умения, необходимые для решения геометрических задач координатным методом.*

Ключевые слова: *аналитическая геометрия, метод координат, декартова система координат, начало координат, координатные оси, координаты точки, расстояние между точками, расстояние от точки до прямой, координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, координаты середины отрезка, скалярное произведение векторов, угол между двумя прямыми.*

Очень часто на вступительных экзаменах в вузы встречаются геометрические задачи, решение которых традиционным методом требует громоздких выкладок и дополнительных построений. Но эти задачи можно решить гораздо проще и быстрее с применением аналитической геометрии. «Найдя более изящное решение, мы открываем для себя какую-то новую загадку величайшей науки всех Наук Человечества – Математики».

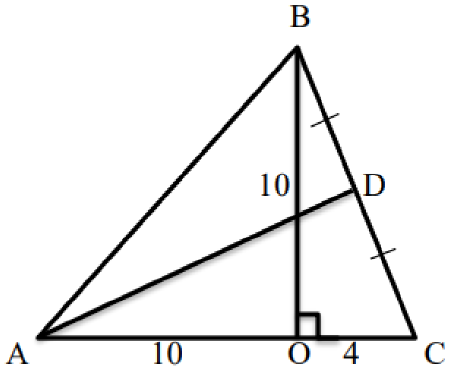
Аналитическая геометрия – это раздел геометрии, в котором геометрические фигуры изучаются с помощью алгебры на основе применения координат. Введение системы координат дает возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и, таким образом, использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется методом координат.

Но, к сожалению, вопросам аналитической геометрии при изучении геометрии уделяется очень мало внимания и времени, несмотря на то, что координаты и векторы важны не только в геометрии – они широко применяются и в других разделах математики, а также в физике и других дисциплинах.

Рассмотрим преимущество аналитического метода решения на примере.

З а д а ч а 1. Высота треугольника равная 10 см, делит основание на два отрезка, равные 10 см и 4 см. найти медиану, проведенную к меньшей из двух других сторон.

Традиционное решение.



Меньшей стороной является BC, так как эта сторона имеет меньшую проекцию. Значит нужно найти медиану AD, проведенную к BC.

Из Δ ABO по теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$ (см)

1) Из Δ BCO по теореме Пифагора:

$\mathrm{BC} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$ (см)

2) $\mathrm{AC} = 10 + 4 = 14$ (см)

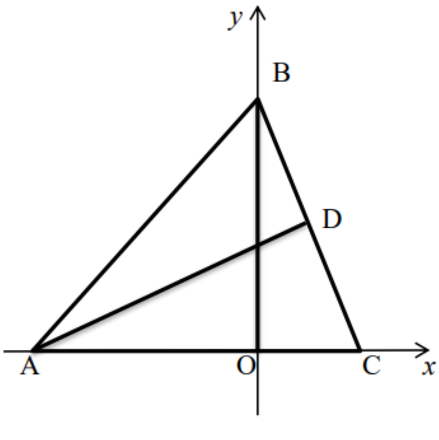
По формуле для вычисления медианы:

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$$

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(200 + 196) - 116} = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13 \text{ (см)}$$

Ответ: 13 см.

Аналитическое решение.



1) Введем прямоугольную систему координат: начало координат – в точке пересечения высоты треугольника с основанием AC, AC-ось ох, OB -ось оу. Запишем координаты вершин треугольника:

2) Запишем координаты вершин треугольника:

$A(-10; 0)$, $B(0; 10)$, $C(4; 0)$.

3) Так как AD – медиана треугольника, то D – середина стороны BC. Найдем координаты точки D:

$$x_d = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_d = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{10+0}{2} = 5$$

То есть $D(2;5)$.

4) bНайдем длину AD по формуле расстояния между точками:

$$AD = \sqrt{(x_d - x_a)^2 + (y_d - y_a)^2} = \sqrt{(2+10)^2 + (5-0)^2} =$$
$$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

Сравнивая два решения данной задачи, мы видим, что первое решение содержит больше действий и требует знание формулы вычисления медианы треугольника, второе же решение более компактное, каждый шаг его понятен, оно быстрее приводит к ответу. Однако, как показывают наблюдения, именно второй способ для учащихся кажется более трудным. Причина затруднений учащихся состоит в том, что второе решение требует применения аналитического метода, с которым они мало знакомы.

Чтобы научить учащихся аналитическому методу решения задач, нужно на уроках повторения рассматривать такие задачи, которые допускают решения различными способами. Решив задачу аналитическим и традиционным методами, показываем преимущество того или иного метода, тем самым учим учащихся применять аналитический метод только тогда, когда это явно выгоднее, чем традиционное решение.

С помощью аналитической геометрии можно решать задачи:

I. на определение величины угла между прямыми;

II. на определение расстояния между точками, т. е. длины отрезка или расстояния от точки до прямой;

III. на нахождение площади треугольника.

При решении задач методом координат нужно ввести декартову систему координат. Если объектом задачи является треугольник, то наиболее удобной является система координат, начало которой находится в точке пересечения основания треугольника и высоты, проведенной к этому основанию, а координатные оси проходят через это основание и высоту. В случае прямоугольного треугольника начало системы координат выбирают в вершине прямого угла, а координатные оси проходят через катеты. Если объектом задачи является квадрат или прямоугольник, то начало системы координат выбирают в одной из вершин, а координатные оси проходят через стороны, выходящие из этой вершины. Если объектом задачи является ромб, то выбирают систему координат, начало которой находится в точке пересечения диагоналей ромба, а координатные оси проходят через диагонали.

Для использования метода координат при решении геометрических задач учащиеся должны уметь:

1) записывать точку в координатной форме и по данной координатной форме строить ее на координатной плоскости;

2) задавать прямую, окружность в координатной форме и по данной координатной форме строить прямую и окружность на координатной плоскости;

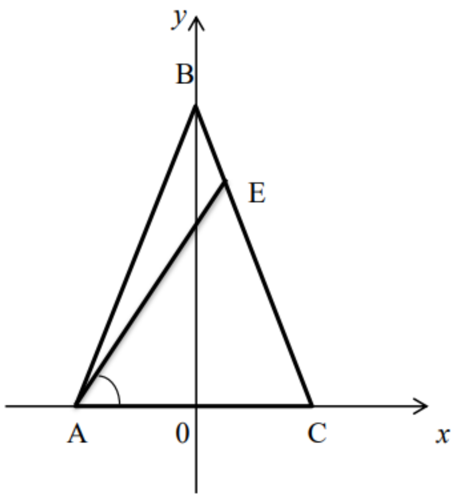
3) вычислять расстояние между двумя точками, расстояние от точки до прямой, находить координаты середины отрезка, находить координаты точки, делящей отрезок в данном отношении;

4) находить координаты вектора, вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Решение геометрической задачи с помощью аналитической геометрии можно разбить на несколько этапов. Рассмотрим их на примере решения конкретной задачи.

З а д а ч а 2. В равнобедренном треугольнике ABC AB = BC = 15 точка E делит сторону BC в отношении 1:4, считая от вершины B. Определите величину угла между прямыми AE и AC, если AC = 20.

Р е ш е н и е.



Дано: Δ ABC, $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 15$,
$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = 1 : 4$, $\mathrm{AC} = 20$
Найти: $\angle$ EAC

I этап. Разместить фигуры на координатной плоскости так, чтобы более рационально можно было выразить в координатной форме отрезки фигуры (как данные, так и искомые) и «увидеть» использование координатного метода для нахождения искомого элемента.

Нам нужно найти угол EAC. Чтобы найти этот угол, надо найти координаты точек A, E и C, для того чтобы найти координаты векторов $\overline{(AE)}$ и $\overline{(AC)}$.

Систему координат введем таким образом: начало координат – в точке пересечения основания треугольника AC с высотой BO, AC-ось ox,OB-ось oy.

II этап. Записать в координатной форме с учетом данных задачи нужные для решения точки.

Из Δ ABO по теореме Пифагора: $\mathrm{BO} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AO}^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}$.

Запишем координаты вершин треугольника:

$\mathrm{A}(-10; 0)$, $\mathrm{B}(0; 5\sqrt{5})$, $\mathrm{C}(10; 0)$.

<u>III этап.</u> Записать исходя из плана решения задачи уравнение линий, расстояние между точками, координаты середины отрезка и т. п.

1) В нашей задаче нужно найти координаты точки E по формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_e = \frac{x_b + \lambda x_c}{1 + \lambda} = \frac{0 + \frac{1}{4}\cdot 10}{1 + \frac{1}{4}} = 2, \qquad y_e = \frac{y_b + \lambda y_c}{1 + \lambda} = \frac{5\sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot 0}{1 + \frac{1}{4}} = 4\sqrt{5}$$

$$E(2;\ 4\sqrt{5})$$

2) Найдем координаты векторов $\overline{\mathrm{AE}}$ и $\overline{\mathrm{AC}}$, образующих угол EAC.

$\overline{AE}\ (x_e - x_a;\ y_e - y_a) = \left(2 - (-10);\ 4\sqrt{5} - 0\right) = \left(12;\ 4\sqrt{5}\right)$,

$\overline{AC}\ (x_c - x_a;\ y_c - y_a) = (10 - (-10); 0 - 0) = (20; 0)$

3) Найдем косинус угла между векторами $\overline{\mathrm{AE}}$ и $\overline{\mathrm{AC}}$ по формуле:

$$\cos\left(\widehat{\overline{\mathrm{AE}}, \overline{\mathrm{AC}}}\right) = \frac{\overline{\mathrm{AE}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}}{|\overline{\mathrm{AE}}| \cdot |\overline{\mathrm{AC}}|} = \frac{x_{\overline{\mathrm{AE}}} \cdot x_{\overline{\mathrm{AC}}} + y_{\overline{\mathrm{AE}}} \cdot y_{\overline{\mathrm{AC}}}}{\sqrt{(x_{\overline{\mathrm{AE}}})^2 + (y_{\overline{\mathrm{AE}}})^2} \cdot \sqrt{(x_{\overline{\mathrm{AC}}})^2 + (y_{\overline{\mathrm{AC}}})^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{\mathrm{AE}}, \overline{\mathrm{AC}}}\right) = \frac{12 \cdot 20 + 4\sqrt{5} \cdot 0}{\sqrt{144 + 80} \cdot \sqrt{400 + 0}}$$

<u>IV этап.</u> Выполнить преобразование полученного в координатной форме выражения.

$$\cos\left(\widehat{\overline{\mathrm{AE}}, \overline{\mathrm{AC}}}\right) = \frac{240}{\sqrt{224} \cdot 20} = \frac{12}{4\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

<u>V этап.</u> Осмыслить полученные результаты на том языке, на котором была написана задача.

Угол между прямыми AE и AC равен углу между их направляющими векторами $\overline{\mathrm{AE}}$ и $\overline{\mathrm{AC}}$:

$$\angle\ \mathrm{EAC} = \arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$$

О т в е т: $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Рассмотрим на примерах применение аналитической геометрии к решению планиметрических задач разных видов.

Определение величины угла между прямыми.

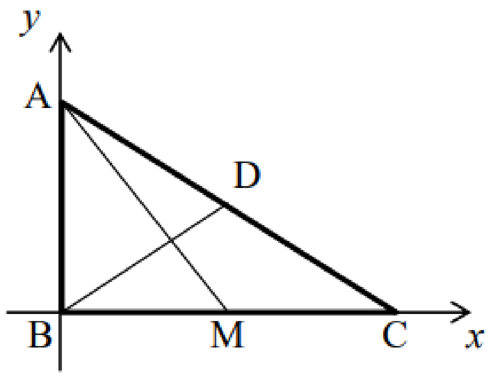
Задачи на нахождение величины угла ф между прямыми сводятся к решению задач на нахождение угла между их направляющими векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для этого находят координаты направляющих векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и вычисляют угол по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \sqrt{(x_b)^2 + (y_b)^2}}$$

Так как угол между двумя прямыми должен быть острым, то для нахождения угла между прямыми можно использовать формулу

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b|}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \sqrt{(x_b)^2 + (y_b)^2}}$$

З а д а ч а 3. В прямоугольном треугольнике *ABC* угол *B* прямой, стороны $AB = 3, BC = 4$. Определите величину угла между медианами *AM* и *BD*.



Дано: Δ ABC, $\angle B = 90^o, AB = 3$,
$BC = 4$, *AM* и *BD* – медианы
Найти: $\widehat{AM, BD}$

Р е ш е н и е.

Введем прямоугольную систему координат: начало координат – в вершине прямого угла – точке B, BC-ось ox, BA -ось oy.

Координаты вершин треугольника: A(0;3), B(0; 0), C(4;0).

Так как BD – медиана, то D – середина стороны AC:

$$x_d = \frac{x_a + x_c}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \qquad y_d = \frac{y_a + y_c}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$

То есть $D\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

Так как AM – медиана, то M – середина стороны BC:

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \qquad y_m = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

То есть $M(2; 0)$.

Найдем координаты векторов $\overline{AM}$ и $\overline{BD}$: $\overline{AM}\,(2; -3)$, $\overline{BD}\ \left(2; \frac{3}{2}\right)$

4) Найдем косинус угла между медианами *AM и BD* по формуле косинуса угла между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{BD}$:

$$\cos\left(\widehat{\overline{AM}, \overline{BD}}\right) = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BD}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{BD}|}$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{AM}, \overline{BD}}\right) = \frac{2 \cdot 2 + (-3) \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4 + \frac{9}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{13} \cdot \frac{5}{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$\widehat{AM, BD} = \pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{13}}$$

О т в е т: $\pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{13}}$

II. Определение расстояния.

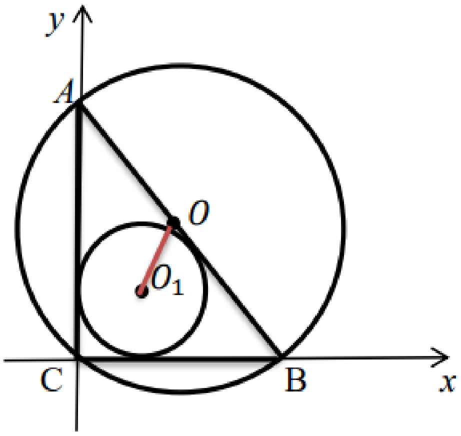
В задачах на нахождение расстояния между точками находят координаты точек, расстояние между которыми нужно найти, и вычисляют расстояние между ними по формуле

$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Расстояние от точки $\mathrm{M}(x_m;\ y_m)$ до прямой *l*, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, вычисляется по формуле

$$d(M;\ l) = \frac{|A\,x_m + B\,y_m + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

З а д а ч а 4. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.



Дано: Δ ABC, $\angle C = 90^o, AC = 4$,
$BC = 3$, окр $(O; R)$,
окр $(O_1;\ r)$
Найти: OO_1

1. Введем прямоугольную систему координат: начало координат – в вершине прямого угла – точке C, CB-ось ох, CA -ось оу.

2. Координаты вершин треугольника: A(0;4), B(3; 0), C(0;0).

3. Треугольник ABC египетский, значит AB = 5.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника (точка O), находится на середине гипотенузы AB:

$$x_o = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_o = \frac{y_a + y_b}{2} = 2$$

То есть $O\ \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Чтобы найти координаты центра вписанной в прямоугольный треугольник окружности (точки O_1), найдем её радиус:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1$$

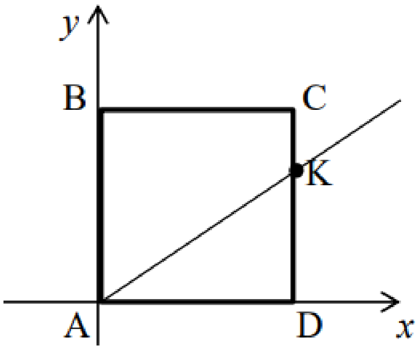
Тогда $O_1(1; 1)$.

1) Найдем OO_1 по формуле расстояния между точками:

$$OO_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

О т в е т: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

З а д а ч а 5. Дан квадрат *ABCD* со стороной 1. Точка *K* принадлежит стороне *CD* и $CK:KD = 1:2$. Найдите расстояние от вершины *C* до прямой АК.



Дано: $\mathrm{ABC}D$, $\mathrm{AB} = 1$, $K \epsilon CD$,
$CK:KD = 1:2$
Найти: $d\ (C; AK)$

2)

3) Введем прямоугольную систему координат: начало координат – в вершине *A*, $\mathrm{A}D - \text{ось } ox$, $A\mathrm{B} - \text{ось } oy$.

4) Координаты вершин квадрата: $A(0;0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$.

5) Так как $CK:KD = 1:2$, то $KD = \frac{2}{3}\ CD = \frac{2}{3}$. Значит, $K\left(1;\ \frac{2}{3}\right)$.

6) Составим уравнение прямой *AK*, используя уравнение прямой с угловым коэффициентом. Для этого подставим координаты точек $A(0;0)$ и $K\left(1;\ \frac{2}{3}\right)$ в уравнение $y = kx + b$:

$$\begin{cases} b = 0 \\ k + b = \dfrac{2}{3} \end{cases}; \qquad \begin{cases} b = 0 \\ k = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

То есть $y = \frac{2}{3}x$ или $2x - 3y = 0$.

7) Найдем расстояние от точки *C* до прямой *AK* по формуле:

$$d\ (C; AK) = \frac{|A\ x_c + B\ y_c + C|}{\sqrt{A^2 +\ B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 +\ (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

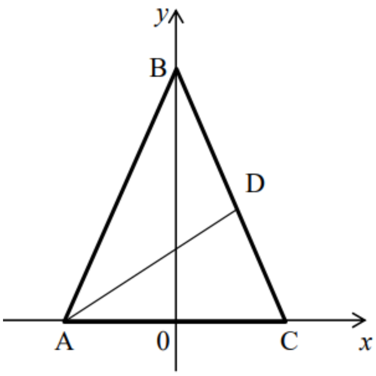
О т в е т: $\frac{1}{\sqrt{13}}$

III. Нахождение площади треугольника.

Если $A(x_a;\ y_a)$, $B(x_b;\ y_b)$ и $C(x_c;\ y_c) -$ координаты вершин треугольника, то его площадь вычисляется по формуле

$$S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}\right|$$

З а д а ч а 6. В равнобедренном треугольнике ABC AB = BC = 15, AC = 18. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите площадь треугольника ABD.



Дано: Δ ABC, $\quad$ AB = BC = 15,
AC = 18, AD - биссектриса
Найти: S_{ABD}

Р е ш е н и е.

1) Введем прямоугольную систему координат: начало координат – в точке пересечения основания треугольника AC с высотой BO, AC – ось ox, OB – ось oy.

2) Из Δ ABO по теореме Пифагора: $\mathrm{BO} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

Координаты вершин треугольника: $A(-9;0)$, $B(0;\ 12)$, $C(9;0)$.

3) По свойству биссектрисы треугольника $BD\colon DC = AB\colon \mathrm{AC} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} = \lambda$

Найдем координаты точки D:

$$x_d = \frac{x_b + \lambda\, x_c}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{5}{6}\cdot 9}{1+\frac{5}{6}} = \frac{45}{11}, \qquad y_d = \frac{y_b + \lambda\, y_c}{1+\lambda} = \frac{12 + \frac{5}{6}\cdot 0}{1+\frac{5}{6}} = \frac{72}{11}$$

То есть $D\left(\frac{45}{11};\ \frac{72}{11}\right)$

1) Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $A(-9;0)$, $B(0;\ 12)$ и $D\left(\frac{45}{11};\ \frac{72}{11}\right)$:

2) $$S_{ABD} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0-(-9) & 12-0 \\ \frac{45}{11}-(-9) & \frac{72}{11}-0 \end{vmatrix}\right| = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11}$$

О т в е т: $49\frac{1}{11}$

Написание данной статьи преследовало две основные цели. Первая – показать эффективность применения аналитической геометрии к решению некоторых видов задач по планиметрии. Это показано на примерах.

Вторая цель – помощь учителю. Настоящий учитель должен знать материал больше школьной программы. Он должен владеть несколькими методами решения задач. Даже если этот метод не изучается в школьном курсе, учитель может применить его для самопроверки, для быстрого получения ответа. Кроме того на учителя обрушивается море сложных задач по планиметрии, вступительных и олимпиадных. Эта статья – скромный компас в этом море, указывающий: «А вот здесь можно применить аналитическую геометрию».