ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

М. Мадрахимова
O'zbekiston respublikasi oliy ta'lim vazirligi
Tashkent Perfect University
e-mail: Madrahimova@perfectUniversity.uz

В области $\Delta=\{(\xi,\eta): a<\xi<\eta<b\}$ плоскости $\xi O\eta$ рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(u_\eta-u_\xi\right)=0, \qquad 0<\beta<\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Задача Гурса. Найти регулярное в области Δ решение $u(\xi,\eta)\in C\left(\bar{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(a,\eta)=\varphi_a(\eta), \ \ a\le\eta\le b, \tag{2}$$

$$u(\xi,b)=\varphi_b(\xi), \ \ a\le\xi\le b, \tag{3}$$

где $\varphi_a(\eta),\ \varphi_b(\xi)-$ заданные функции из класса $C[0,1]$, которые выполняют условия согласования $\varphi_a(b)=\varphi_b(a)$.

При получении решения поставленной задачи будем пользоваться известным представлением решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1). Регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi-u_\eta\right)=\nu(\xi),\ \ a<\xi<b \tag{4}$$

имеет вид [1]

$$u(\xi,\eta)=k_3\int_a^\xi(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}\nu(t)dt+\int_a^\eta V(a,t;\xi,\eta)\Phi_a(t)dt, \tag{5}$$

где

$$V(s,t;\xi,\eta)=\begin{cases}R(s,t;\xi,\eta), \ t\ge\xi,\\ \bar{R}(s,t;\xi,\eta), \ t\le\xi,\end{cases}$$

$$R(s,t;\xi,\eta)=\left(\frac{t-s}{\eta-\xi}\right)^\beta F(\beta,1-\beta;1;\sigma); \qquad \sigma=\frac{(\xi-s)(\eta-t)}{(t-s)(\eta-\xi)},$$

$$\bar{R}(s,t;\xi,\eta)=k_1\frac{(t-s)^{2\beta}}{(\xi-s)^\beta(\eta-t)^\beta}F\left(\beta,\beta;2\beta;\frac{1}{\sigma}\right), \ \ k_1=\frac{2k_3}{(2-4\beta)^{2\beta}},$$

$$k_3=\frac{\Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \ \ \Phi_a(t)=\varphi_a'(t)+\beta\varphi_a(t)/(t-a),$$

$F(a,b;c;z)-$ гипергеометрическая функция Гаусса, $\nu-$ заданная функция.

Здесь следует отметить, что $V(s,t;\xi,\eta)$- есть функция Римана-Адамара, а $R(s,t;\xi,\eta)$- функция Римана уравнения (1).

Полагая в формуле (5) $\eta=b$ и учитывая условие (3), получаем функциональное уравнение относительно $\nu(x)$ $(x=\eta)$. Последнее разрешив как обобщенное интегральное уравнение Абеля, находим выражение для $\nu(x)$ и подставив которое в формулу (5), получим решение задачи (1)-(3) в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^\beta D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]dt-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^\beta D_{at}^{1-\beta}\left[\int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds\right]dt+$$

$$+(\eta-\xi)^{-\beta}\int_\xi^\eta(t-a)^\beta F(\beta,\beta;1-\beta;s)\Phi_a(t)dt, \qquad (6)$$

где $D_{ax}^\alpha[f(x)]-$ известный оператор дробного дифференцирования (в смысле Лиувилля) порядка α.

Исследуем правую часть формулы (6). С этой целью сперва рассмотрим первое слагаемое. Обозначая его через Ω_1 и используя определение оператора дробного дифференцирования, получим

$$\Omega_1=\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi(\xi-s)^{-\beta}(\eta-s)^{-\beta}(b-s)^\beta ds\int_a^s(s-t)^{\beta-1}\varphi_a'(t)dt\,.$$

Меняя порядок интегрирования, затем выполняя замену $s=t+(\xi-t)z$ в полученном внутреннем интеграле и пользуясь формулой представлением функции $F_1(a,b,b',c;x,y)$ имеем

$$\Omega_1=\int_a^\xi\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\varphi_b'(t)dt,$$

где

$$F_1(a,b,b',c;x,y)=\sum_{m,n=0}^\infty\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}n!m!}x^my^n,\ |x|<1,|y|<1.$$

Осуществляя в Ω_1 интегрирование по частям, получим

$$\Omega_1=\left(\frac{\eta-\xi}{b-\xi}\right)^{-\beta}\varphi_b(\xi)-\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{-\beta}F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-a}{\eta-a},\frac{\xi-a}{b-a}\right)\varphi_b(a)-$$

$$-\int_a^\xi\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\right\}\cdot\varphi_b(t)dt\,.$$

Теперь преобразуем подынтегральное выражение в Ω_1. Для этого последовательно применяем формулы дифференцирования функции $F_1(a,b,b',c;x,y)$ по обеим переменным и формулу приводимости вида

$$F_1(a,b,b',b+b';x,y)=(1-y)^{-a}F\left(a,b;b+b';(x-y)/(1-y)\right).$$

В результате этих преобразований получаем тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^{\beta} F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{b-t}{b-\xi}\right)^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^{\beta} F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-t)(b-\eta)}{(\eta-t)(b-\xi)}\right)\right\},$$

с помощью которого после интегрирования по частям Ω_1 принимает вид

$$\Omega_1=\left(\frac{b-a}{b-\xi}\right)^{\beta}\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{-\beta} F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-a)(b-\eta)}{(\eta-a)(b-\xi)}\right)\varphi_b(a)+$$

$$+(b-\xi)^{-\beta}\int_a^{\xi}\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^{\beta} F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-t)(b-\eta)}{(\eta-t)(b-\xi)}\right)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right]dt.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части формулы (6) удалось выразить через функцию Римана уравнения (1):

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^{\beta}D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]dt=$$

$$=R(a,b;\xi,\eta)\varphi_a(b)+\int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right].$$

Переходим к исследованию остальных слагаемых правой части формулы (6), сумму которых обозначим через Ω_2.

Рассмотрим интеграл

$$f(t)=\int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds$$

и для исследования этого интеграла введем обозначение

$$f_\varepsilon(t)=\int_a^{t-\varepsilon}\bar{R}(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds+\int_{t+\varepsilon}^{b}R(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds,$$

где $\varepsilon>0-$ достаточно малое число. Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(t)=f(t)$.

В дальнейших исследованиях важную роль играет равенство

$$\int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}f_\varepsilon(t)\right]=R(\xi,b;\xi,\eta)f_\varepsilon(\xi)-$$

$$-R(a,b;\xi,\eta)\int_{a+\varepsilon}^{\xi}R(a,s;a,b)\Phi_a(s)ds-\int_a^{\xi}(b-t)^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)\right\}f_\varepsilon(t)dt.$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\Omega_2=\int_b^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_a(t)\right].$$

Таким образом, решение задачи Гурса для уравнения (1) принимает вид

$$u(\xi,\eta)=R(a,b;\xi,\eta)\varphi_a(b)+\int_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right]+$$

$$+\int_{b}^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_{a}(t)\right].$$

В заключении отметим, что в [1] применен метод Римана при решении задачи Гурса для общего уравнения гиперболического типа и решение получено в явном виде. Нам кажется интересным получить решение задачи Гурса для данного частного случая, не используя метода Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Уринов А.К. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Изд. «Фергана», 2015. 216 с.