BIRINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMANING TAXMINIY YECHIMI UCHUN KO'P BOSQICHLI PSEVDOSPEKTRAL USULI

Qo'ldosheva M.N
Buxoro Davlat Universiteti

Annotatsiya: *O'zgaruvchan koeffitsientli va boshlang'ich (chegara) shartlarga ega oddiy differensial tenglamalarni echish uchun chiziqli algebraik tenglamalar tizimini qurishga yangi yondashuv matritsalar strukturasini sezilarli darajada soddalashtirish, uni diagonal shaklga keltirish imkonini beradi. Tizimning yechimi tanlangan kolokatsiya tarmog'idagi Chebishev ko'phadlari qiymatlari matritsasi kollokatsiya nuqtalarida berilgan hosilani tavsiflovchi funktsiya qiymatlari vektoriga ko'paytiriladi. Olingan vektorni ikki diagonali spektral matritsaga keyingi ko'paytirish, Chebishev differentsial matritsasiga nisbatan "teskari" birinchisidan tashqari, qidirilayotgan yechimning barcha kengayish koeffitsientlarini beradi. Ushbu birinchi koeffitsient ikkinchi bosqichda ma'lum bir boshlang'ich (va/yoki chegara) sharti asosida aniqlanadi. Yondashuvning yangiligi birinchi navbatda kelajakdagi yechimning hosilasini interpolyatsiya qilish (kollokatsiya)ning barqaror va hisoblash jihatdan sodda usulidan foydalangan holda, differentsial tenglamani qanoatlantiradigan funktsiyalar sinfini (to'plamini) tanlashdir. Keyin kelajakdagi yechimning kengayish koeffitsientlari (birinchisidan tashqari) integratsiya matritsasidan foydalangan holda lotinning hisoblangan kengayish koeffitsientlari nuqtai nazaridan aniqlanadi. Nihoyat, bu yechimlar to'plamidan faqat berilgan boshlang'ich shartlarga mos keladiganlar tanlab olinadi.*

Tayanch so'z va iboralar: *Chebishev polinomlari, Gauss-Lobatto to'plamlari, Spektral usul, Chebishev matritsasi.*

ASOSIY QISM

Spektral usullar - amaliy matematika va hisoblashda ko'p differensial tenglamalarni sonli yechish uchun qo'llaniladigan usullar sinfi. Ushbu usulning g'oyasi differensial tenglamaning kerakli yechimini ma'lum asosiy funktsiyalar yig'indisi sifatida ko'rsatishdan iborat.

Spektral usul va chekli elementlar usullari bir-biri bilan bevosita chambarchars bog'liq va bir xil g'oyalarga asoslanadi. Ularning orasidagi farq shundaki, spektral usullar butun domenda nolga teng bo'lmagan asos funktsiyalaridan foydalanadi, chekli elementlar usullari esa faqat kichik subdomenlarda nolga teng bo'lmagan asosiy funktsiyalardan foydalanadi. Boshqacha qilib aytganda, spektral usullar global yondashuvdan, chekli elementlar usullari esa lokal yondashuvdan foydalanadi. Aynan shuning uchun spektral usullar mukammal yaqinlashuvni ta'minlaydi, ularning "eksponensial yaqinlashuvi" yechim silliq bo'lganda eng tez bo'ladi.

Berilgan dastlabki shartlarga ega oddiy differensial tenglamani raqamli yechishning spektral usullari ko'pincha differensial munosabatlarning bajarilishini ta'minlaydigan boshlang'ich shartlarni ham, shartlarni ham o'z ichiga olgan chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echishga qisqartiriladi. Biroq, chiziqli tenglamalar tizimiga dastlabki (chegaraviy) shartlarning apriori kiritilishi matritsalarni to'ldirishning sezilarli darajada oshishiga va natijada, masalani hal qilish algoritmi va usulining murakkablashishiga olib keladi.[1]

Yana qiziqarli yondashuvdan biri bu chegara shartlarini avtomatik ravishda hisobga oladigan asosni tanlashdir. Bu boshlang‘ich muammoning SLAE ni shakllantirishda ko‘p ishlatiladigan usul bo‘lib, tabiiy yo‘l bilan asosni yaratishda zarur bo‘lgan boshlang‘ich (chegara) shartlarini hisobga olishga qisqartiradi, ya’ni, har bir bazis funksiyasi avvalgi shartlarni qanoatlantiradigan bazis tanlanadi. Ushbu yondashuv yordamida olingan yechim avtomatik ravishda dastlabki shartlarni qanoatlantiradigan funktsiyalar sinfida qidiriladi. Biroq, bu holda yangi asosiy funktsiyalar bilan ishlash ancha murakkablashadi.

Bir guruh mualliflar tomonidan taklif etilgan yondashuvga ko`ra, birinchi navbatda, kutilayotgan yechim hosilasini interpolyatsiya qilish (kollokatsiya)ning barqaror va hisoblash jihatdan sodda usuli yordamida differentsial tenglamani qanoatlantiradigan funksiyalar sinfi (to'plami) tanlanadi. Keyin kutilayotgan yechimning kengayish koeffitsientlari (ba'zilaridan tashqari) integratsiya matritsasi yordamida hosilaning hisoblangan kengayish koeffitsientlari nuqtai nazaridan aniqlanadi. Shundan keyingina ushbu yechimlar to'plamidan berilgan boshlang'ich shartlarga mos keladiganlari tanlanadi.[2]

Bu yerda biz asosiy muammoni mustaqil kichik muammolarga bo‘lish va yechimning tarkibiy qismlarini alohida-alohida yechim hosilasini aniqlaydiganlar va chegaraviy shartlar bilan belgilanadiganlar qismlarga ajratilgan. Shunday qilib, muammo ikkita mustaqil kichik muammoga bo'linadi, ularning har biri barqaror va oddiy echimga imkon beradi. Eng oddiy holatda birinchi muammoni hal qilish o'ng tomonning vektorini Gauss-Lobatto tarmog'idagi Chebishev funktsiyalari qiymatlari matritsasiga ko'paytirishga keltiriladi. Keyingi bosqichda biz SLAE ni diagonal musbat aniq matritsa bilan yechamiz va natijada chapdagi vektorni ikki diagonali matritsaga ko'paytiramiz, teskari (anti-hosil) differensiatsiyaning spektral Chebishev matritsasi bo'yicha, biz hamma natijani olamiz. Birinchisi tashqari istalgan yechimning kengayish koeffitsientlari. Ikkinchisi «eng qiyin» bosqichda, biz bu koeffitsientga nisbatan birinchi tartibli chiziqli algebraik tenglamani yechib, bazis ko'phadlar nuqtai nazaridan yechimni kengaytirishning birinchi koeffitsientini aniqlaymiz.

Oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish

Berilgan boshlang‘ich (chegara) shart uchun trivial oddiy differensial tenglamaning aniq yechimi

$y' = f(x),\ x \geqslant x_0,\ y(x) = y_0$

o‘ng tomoni y dan mustaqil bo‘lgan shaklda taqdim etilishi mumkin.

$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$

Funksiyalarni integrallashning raqamli usullari nazariy va amaliy nuqtai nazardan yaxshi ishlab chiqilganligi sababli, ularni umumiy shakldagi oddiy differensial tenglamalarning sonli yechimiga qoʻllash tabiiy ko'rinadi.

$y' = f(x, y(x)),\ x \geqslant x_0,\ y(x_0) = y_0$

Runge-Kutta tipidagi usullarning rivojlanishi va keng qo'llanilishini tabiiy ravishda tushuntirib beradigan fakt aynan mana shu.

Hosilning yaqinlashishi. Cauchy muammosi

Birinchidan, funktsiyani uning hosilasi va ba'zi (bir) qo'shimcha shartidan aniqlash (qayta tiklash) masalasini ko'rib chiqing. Ushbu formulada muammo tabiiy ravishda ikkita kichik shartga bo'linadi:

— hosilaning ko'p nomli interpolyatsiyasi (bazis funksiyalarida lotinning chekli qatorga kengayish koeffitsientlarini hisoblash)

— kerakli funktsiyaning koeffitsientlarini hisoblash. Boshlangʻich (chegara va boshqalar) sharti va hosila kengayish koeffitsientlari.

Umumiylikni yo'qotmasdan, biz ta'rif sohasi yechim [-1;1]oraliqdabdeb taxmin qilamiz.

Ko'pincha uzluksiz funktsiyalarning yaqinlashuvi kattaligi kichik bo'lgan Chebishev qatorining shartlarini bekor qilish orqali olinadi. Boshqa darajali qatorlar yordamida olingan yaqinlashuvlardan farqli o'laroq, Chebishev ko'phadlarida (deyarli optimal bo'lish xususiyatiga ega) yaqinlashish berilgan aniqlikdagi ko'phadlar orqali funktsiyani yaqinlashtirish uchun zarur bo'lgan atamalar sonini minimallashtiradi. Bu Chebishev qatoriga asoslangan yaqinlashish eng yaxshi yagona yaqinlashuvga (bir xil darajadagi ko'phadlar orasida) yaqin bo'lishi, ammo topish osonroq bo'lgan xususiyat bilan bog'liq. Bundan tashqari, bu interpolatsiya nuqtalarini oqilona tanlash bilan Gibbs effektidan qochish imkonini beradi.

ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALARGA MISOLLAR

Funksiyani hosilasi va chegaraviy shartidan qayta qurish. Runge-Kutta-Felberg usuli bilan taqqoslash.

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(0) = y_0, \quad x \in [a, b].$$

Keling, Runge-Kutta usuli bilan olingan echimlarni (RKF45 quyi tartibi) va yuqorida tavsiflanganidek olingan echimlarni taqqoslaylik.

Formula bo'yicha hisoblangan $[a, b]$ oraliqda to'rni belgilaymiz

$$x_j = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{j}{N-1}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

va $[-1, 1]$ oraliqda tanlangan Gauss-Lobatto panjarasi bilan bog'liq. to'r nuqtalari soni N ga teng ya'ni berilgan hosila va qo'shimcha shartdan funktsiyani bizning usulimiz bilan tiklash uchun faqat funktsiyani hisoblash kerak va bu qiymatlarni kengaytirishga qayta hisoblash kerak.. Chebishev polinomlarida kengayish koeffitsientlariga faqat $2N$ bo‘linish va $2N$ qo‘shimcha qiymatlar kerak bo'ladi.

Koshi masalasini Runge-Kutta-Felberg usulida yechish uchun biz yuqorida $[a,\ b]$ bo‘yicha hisoblangan to‘rning har bir subintervalida RKF45 algoritmini qo‘lladik.

Eng oddiy masala yechimini izlashda algoritmlar solishtiriladi.

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \quad y(0) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Runge-Kutta usulida aniqlikni avtomatik nazorat qilish bilan amalga oshirilgan hisoblash butun intervalda funktsiya qiymatlarining 800 ga yaqin hisobini talab qildi.

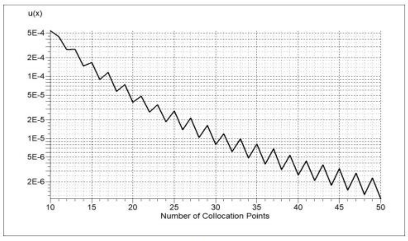
Noma'lumlarni ajratishning ikki bosqichli usuli uchun hisoblangan qiymatlarning to'r nuqtalarida aniq qiymatlardan chetga chiqish natijalari 1- jadvalda keltirilgan.

Hisoblangan qiymatlarning aniq qiymatlardan chetga chiqishi

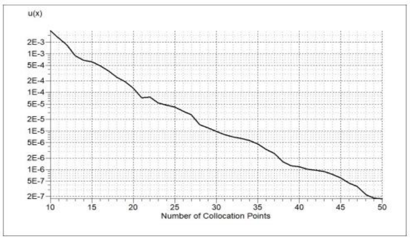
To‘r nuqtalari soni	11	13	15	30
Maksimal og`ish	$<4 \cdot 10^{-7}$	$<5 \cdot 10^{-9}$	$<2 \cdot 10^{-13}$	$<10^{-19}$

Koshi muammosini yechishning yana bir nechta namunaviy misollarini ko‘rib chiqing, ya'ni berilgan hosilalar va boshlang'ich shartdan funktsiyalarni tiklash. Chebishev matritsalari yordamida fizik fazoda differentsiallash matritsalari yordamida hosilalarni hisoblashning aniqligidan funksiyalar model sifatida o‘rganildi. Tanlangan misollar yaqinlashuv nuqtalari soniga bog'liq holda hosilalarni hisoblashning aniqligini tizimli ravishda ko'rsatadi.

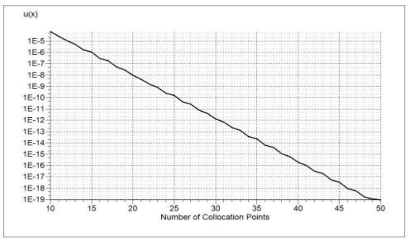
Turli silliqlik bilan tavsiflangan to'rtta funktsiya ko'rib chiqiladi: $|x3\ |$, $\exp(-x^{-2})$, $1/(1 + x^2\ )$ VA x^{10} Birinchi funksiya uchinchi hosilaga ega chegaralangan o'zgaruvchanlik, ikkinchi funktsiya silliq, ammo analitik emas uchinchisi $[-1,\ 1]$ yaqinida analitik, to‘rtinchisi esa polinom. Biz tomonidan olingan yechimlarning aniqligi bir xil miqdordagi birikma nuqtalaridan foydalanganda Trefethen yechimlaridan 1,5-3 darajaga yaxshiroq[2].



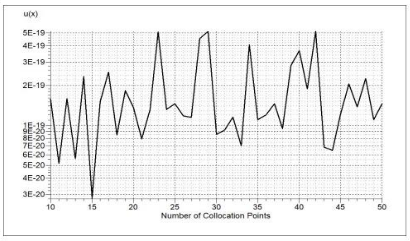
(a) $u(x) = |x^3|, \quad u(-1) = 1$



(b) $u(x) = \exp(-x^{-2}), \quad u(-1) = e^{-1}$



(c) $u(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u(-1) = \frac{1}{2}$



(d) $u(x) = x^{10}, \quad u(-1) = 1$

1-rasm Taxminan nuqtalar soniga qarab silliqlikni oshiruvchi to'rtta funktsiya uchun hosilalarni tiklashning aniqligi

XULOSA

Differensial tenglamalarni yechishda asosan yechimning mahalliy yaqinlashuviga asoslangan usullar mavjud bo’lib, ularda birinchi navbatda dastlabki yaqinlashish (chegara shartlari) qo’llaniladi. Bular Eyler, Runge-Kutta usuli va boshqalar kabi usullardir. Global funktsiyalardan foydalangan holda yechimni yaqinlashtirishga asoslangan boshqa usullar [global kolokatsiya usullari - Meyson, Boyd, Fornberg, Iserles, Townsend] bir vaqtning o'zida boshlang'ich (chegaraviy) shartlarni va shartlarni o'z ichiga olgan tenglamalar tizimini qurishga asoslangan. Noma'lumlarni ajratishning ikki bosqichli usuli uchun hisoblangan qiymatlarning to'r nuqtalarida aniq qiymatlardan chetga chiqish natijalari 1- jadvalda keltirilgan.

Raqamli usullarni qo'llash nuqtai nazaridan, ehtimol, eng istiqbolli bu Yakobi polinomlarining ma'lum bir holatini - Chebyshev ko'phadlarini o'ziga xos asos funktsiyalari sifatida ishlatishdir. Chebishev polinomlari ODE yechimining deyarli optimal yaqinlashuvini, diskret ortogonallik shartidan foydalanish uchun Gauss-Lobatto panjarasini hisoblash qulayligini va izlanayotgan yechimlarning differentsiallash va integratsiya matritsalarini qurish qulayligini aniqlovchi uch muddatli munosabatlarni ta'minlaydi. Dastlabki (chegaraviy) shartlar dastlabki masalani echishning ikkinchi bosqichida ko'rib chiqiladi, bu aslida bitta noma'lum koeffitsientli chiziqli tenglamani yechishga qisqartiriladi. Birinchi muammoning echimi Gauss-Lobatto to'ridagi Chebishev funktsiyalari qiymatlari matritsasini aniqlash uchun dastlabki differentsial tenglamaning o'ng tomonini aniqlaydigan funktsiya qiymatlari vektoriga ko'paytirishga keltiriladi. Keyinchalik, ikki diagonalli integratsiya matritsasini koeffitsientlar vektoriga ko'paytirish, birinchisidan tashqari, istalgan yechimning barcha koeffitsientlarini beradi. Ikkinchi bosqichda dastlabki (chegara) shartdan foydalanish eritmaning kengayishining birinchi koeffitsientini aniqlash imkonini beradi. Birinchi darajali ODElarni echish muammosini ikkita kichik muammoga bo'lishga asoslangan yondashuv juda istiqbolli ko'rinadi.

ADABIYOTLAR RO`YXATI:

1. S. Chandrasekaran, M. Gu, “Fast and stable algorithms for banded plus semiseparable systems of linear equations”, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, №2, 373–384, 2003
2. Konstantin P., Dmitry S., Ali Weddeye Hissein, “Multistage pseudo-spectral method (method of collocations) for the approximate solution of an ordinary differential equation of the first order”// Discrete & Continuous Models & Applied Computational Science, 30 (2) 127–138, 2022
3. Abdirashidov A. va boshqalar, “Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni bir qadamli sonli usullar yordamida yechish”, uslubiy ko‘rsatma, SamDU nashri, 2018.