СРАВНЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории академического лицея Ташкентского государственного экономического университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье приведены способы сравнения числовых значений различных величин. В статье рассмотрены способы сравнения дробей, степеней, корней, тригонометрических и логарифмических выражений, применение каждого способа показано на примерах.*

Ключевые слова: *числовое значение величины, дробь, степень, корень, тригонометрическое выражение, логарифмическое выражение, сравнение чисел.*

Каждый из математических разделов имеет свою специфику, так как оперирует своими характерными для него понятиями и свойствами. Однако есть такие понятия, с которыми приходится иметь дело в каждом из математических разделов.

Этими понятиями являются число и величина. Из-за исключительной важности данных понятий методика работы над ними должна быть тщательно продумана и усовершенствована.

На вступительных экзаменах в вузы встречаются задания, в которых необходимо умение сравнивать числовые значения величин. ***Числовое значение величины*** – это число, которое получается после выполнения всех действий в исходном числовом выражении. Поэтому важно научить учащихся сравнивать числовые значения величин разными способами и использовать для решения более рациональный, удобный и быстрый способ.

Рассмотрим способы сравнения числовых значений величин из разных разделов математики и покажем их применение на примерах.

Сравнение дробей.

Какая из дробей меньше: $\frac{32}{105}$ или $\frac{68}{217}$?

Способы сравнения:

1) Сравнить дроби после приведения к общему знаменателю (из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше).

2) Сравнить дроби после приведения к общему числителю (из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше).

3) Обратить каждую дробь в десятичную с нужным для сравнения количеством десятичных знаков и сравнить поразрядно.

4) Найти частное от деления дробей, т. е. их отношение (если отношение двух чисел больше единицы, то первое число больше второго, а если отношение меньше единицы, то первое число меньше второго).

$\frac{32}{105} : \frac{68}{217} = \frac{32 \cdot 217}{105 \cdot 68} = \frac{8 \cdot 31}{15 \cdot 17} = \frac{248}{255} < 1$, значит $\frac{32}{105} < \frac{68}{217}$.

5) Сравнить дроби обратные данным и между данными дробями поставить противоположный знак.

$\frac{105}{32} = 3\frac{9}{32}$, $\frac{217}{68} = 3\frac{13}{68}$. Так как целые части у дробей одинаковы, то сравним дробные части приведением к общему знаменателю

$\frac{9}{32} = \frac{9}{4 \cdot 8} = \frac{9 \cdot 17}{4 \cdot 8 \cdot 17} = \frac{153}{4 \cdot 8 \cdot 17}$, $\frac{13}{68} = \frac{13}{4 \cdot 17} = \frac{13 \cdot 8}{4 \cdot 17 \cdot 8} = \frac{104}{4 \cdot 17 \cdot 8}$, значит $\frac{9}{32} > \frac{13}{68}$, поэтому $\frac{32}{105} < \frac{68}{217}$.

Сравнение степеней и корней.

1) Приведение степеней к одинаковому основанию.

Если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$;

если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$.

Пример. Сравнить числа 625^8 и 125^{12}.

Решение. $625^8 = (5^4)^8 = 5^{32}$; $125^{12} = (5^3)^{12} = 5^{36}$, т. к. $5^{32} < 5^{36}$, то $625^8 < 125^{12}$.

2) Приведение степеней к одинаковому показателю.

Если $a < b$ и $m > 0$, то $a^m < b^m$;

если $a < b$ и $m < 0$, то $a^m > b^m$.

Пример. Сравнить числа 8^{20} и 72^{10}.

Решение. $8^{20} = (8^2)^{10} = 64^{10}$, т. к. $64 < 72$, то $8^{20} < 72^{10}$.

3) Приведение корней к одинаковому показателю (для корней с одинаковыми показателями большему подкоренному числу соответствует больший корень).

Примеры. Что больше: а) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$;

в) $\sqrt[4]{0,1}$ или $\sqrt[5]{0,1}$; г) $\sqrt[5]{2}$ или 1,2?

Решение.

а) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$, значит $\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$.

б) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$, значит $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

в) $\sqrt[4]{0,1} = \sqrt[20]{0,1^5}$; $\sqrt[5]{0,1} = \sqrt[20]{0,1^4}$, значит $\sqrt[4]{0,1} < \sqrt[5]{0,1}$.

г) $\sqrt[5]{1,2^5} = \sqrt[5]{2,48832}$, так как $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{2,48832}$, то $\sqrt[5]{2} < 1,2$.

4) С помощью сравнения десятичных логарифмов чисел (при основании, большем единицы, большему логарифму соответствует большее число).

Пример. Сравнить числа $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{2}$.

Решение.

$\lg\sqrt{2} = \frac{1}{2}\lg 2$, $\lg\sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}\lg 2$, так как $\frac{1}{2}\lg 2 > \frac{1}{3}\lg 2$, то $\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$.

Сравнение тригонометрических выражений.

1) Сравнение значений тригонометрических функций приведением их к наименьшему углу с помощью формул приведения, свойства периодичности, с применением свойств тригонометрических функций.

Примеры. Сравнить числа: а) $\sin 500^o$ или $\cos 500^o$;

б) $tg\ 2000^o$ или $ctg\ 1000^o$; в) $tg\ 500^o$ или $\sin 1500^o$.

Решение.

а) $\sin 500^o = \sin 140^o = \sin 40^o > 0$,

$\cos 500^o = \cos 140^o = -\cos 40^o < 0$.

Значит, $\sin 500^o > \cos 500^o$.

б) $tg\ 2000^o = tg\ (180^o \cdot 11 + 20^o) = tg\ 20^o > 0$,

$ctg\ 1000^o = ctg(180^o \cdot 5 + 100^o) = ctg100^o = -tg\ 10^o < 0$.

Значит, $tg\ 2000^o > ctg\ 1000^o$.

в) $tg\ 500^o = tg\ (180^o \cdot 2 + 140^o) = tg\ 140^o = -tg\ 40^o < 0$,

$\sin 1500^o =.\sin(360^o \cdot 4 + 60^o) = \sin 60^o > 0$.

Значит, $tg\ 500^o < \sin 1500^o$.

2) Сравнение значений тригонометрических функций приведением их к одноименным тригонометрическим функциям, с помощью формул приведения, с помощью перехода от радианной меры угла к градусной (1 рад $\approx$ $\mathbf{57,3^o}$).

Примеры. Сравнить числа: а) $\sin 3$ или $\sin 2$;

б) $\sin 0{,}5$ или $\cos 0{,}5$.

Решение.

а) $\sin 3 \approx \sin 171^o = \sin 9^o$; $\sin 2 \approx \sin 114^o = \sin 66^o$.

Значит, $\sin 3 < \sin 2$.

б) $\sin 0{,}5 \approx \sin 28{,}5^o$, $\cos 0{,}5 = \cos 28{,}5^o = \sin 61{,}5^o$.

Значит, $\sin 0{,}5 < \cos 0{,}5$.

Сравнение логарифмических выражений.

1) Приведение логарифмов к одинаковому основанию.

Если у логарифмов одинаковые основания, то при сравнении используется свойство монотонности логарифмической функции (если основание логарифма больше единицы, то больше будет тот логарифм, у которого подлогарифмическое выражение больше; если основание логарифма меньше единицы, то больше будет тот логарифм, у которого подлогарифмическое выражение меньше).

Пример. Сравнить: $\log_2 \sin 50^o$ и $\log_2 tg\ 50^o$.

Решение. $\sin 50^o < 1$, $tg\ 50^o > 1$ (так как $tg\ 45^o = 1$),

значит $\sin 50^o < tg\ 50^o$, поэтому $\log_2 \sin 50^o < \log_2 tg\ 50^o$.

2) Переход к десятичным логарифмам.

Пример. Что больше: $\log_5 10$ или $\log_4 10$?

Решение. $\log_5 10 = \frac{\lg 10}{\lg 5}$; $\log_4 10 = \frac{\lg 10}{\lg 4}$.

У полученных дробей одинаковые числители, поэтому нужно сравнить знаменатели: $\lg 5 > \lg 4$, значит $\frac{\lg 10}{\lg 5} < \frac{\lg 10}{\lg 4}$ и $\log_5 10 < \log_4 10$.

3) Метод оценивания каждого логарифма.

П р и м е р. Сравнить: $\log_5 10$ и $\log_3 8$.

Р е ш е н и е. Оценим каждый логарифм, т. е. определим между какими целыми числами он находится:

$\log_5 5 < \log_5 10 < \log_5 25$ или $1 < \log_5 10 < 2$;

$\log_3 3 < \log_3 8 < \log_3 9$ или $1 < \log_3 8 < 2$.

Так как оба логарифма находятся в одинаковом промежутке, то умножим каждый логарифм на 2 (от умножения на одно и то же положительное число результат сравнения не изменится) и опять оценим каждый логарифм:

$2\cdot \log_5 10 = \log_5 10^2 = \log_5 100$, $2\cdot \log_3 8 = \log_3 8^2 = \log_3 64$,

$\log_5 25 < \log_5 100 < \log_5 125$ или $2 < \log_5 100 < 3$;

$\log_3 27 < \log_3 64 < \log_3 81$ или $3 < \log_3 64 < 4$.

Отсюда видно, что $\log_5 100 < 3$, а $\log_3 64 > 3$.

Значит, $\log_5 10 < \log_3 8$.

Если после умножения на 2 логарифмы будут находиться в одинаковом промежутке, то умножаем оба логарифма на 3 и оцениваем и т. д.

4) Сравнение с нулем.

П р и м е р. Сравнить: $\log_{\frac{1}{3}} 4$ и $\log_2 1{,}5$.

Р е ш е н и е. $\log_{\frac{1}{3}} 4 < 0$, $\log_2 1{,}5 > 0$, значит, $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_2 1{,}5$.

5) Сравнение с единицей.

П р и м е р. Сравнить: $\log_3 4$ и $\log_5 3$.

Р е ш е н и е. $\log_3 4 > 1$, $\log_5 3 < 1$, значит, $\log_3 4 > \log_5 3$.

6) Оценка разности (если $a - b > 0$, то $a > b$; если $a - b < 0$, то $a < b$).

П р и м е р. Сравнить: $\log_4 12$ и $\log_6 13$.

Р е ш е н и е. Составим разность этих чисел и сравним ее с нулем:

$$\log_4 12 - \log_6 13 = \log_4 12 - \frac{\log_4 13}{\log_4 6} = \frac{\log_4 12 \cdot \log_4 6 - \log_4 13}{\log_4 6} =$$

$$= \frac{\log_4(4\cdot 3)\cdot \log_4\left(4\cdot\frac{6}{4}\right) - \log_4\left(4\cdot\frac{13}{4}\right)}{\log_4 6} =$$

$$= \frac{(1+\log_4 3)\cdot\left(1+\log_4\frac{6}{4}\right) - \left(1+\log_4\frac{13}{4}\right)}{\log_4 6} =$$

$$= \frac{1}{\log_4 6}\left(1 + \log_4\frac{6}{4} + \log_4 3 + \log_4 3\cdot\log_4\frac{6}{4} - 1 - \log_4\frac{13}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\log_4 6}\left(\log_4\frac{6\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 13} + \log_4 3\cdot\log_4\frac{6}{4}\right) =$$

$= \frac{1}{\log_4 6}\left(\log_4 \frac{18}{13} + \log_4 3 \cdot \log_4 \frac{6}{4}\right) > 0.$

Так как все числа, из которых составлены логарифмы больше единицы, то все логарифмы положительны, поэтому разность больше нуля.

Значит, $\log_4 12 > \log_6 13.$

7) С помощью отношения чисел.

П р и м е р. Сравнить числа $\log_4 26$ и $\log_6 17.$

Р е ш е н и е.

Составим отношение этих чисел и сравним с единицей:

$$\frac{\log_4 26}{\log_6 17} = \frac{\log_4 26 \cdot \log_4 6}{\log_4 17} = \frac{\log_4 26}{\log_4 17} \cdot \log_4 6 = \log_{17} 26 \cdot \log_4 6 > 1,$$

так как каждый логарифм больше единицы, то их произведение так же больше единицы.

Значит, $\log_4 26 > \log_6 17.$

Обучение учащихся различным способам сравнения числовых значений различных величин активизирует учебную деятельность учащихся, повышает эффективность обучения, а так же повышает качество математического образования.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. I. Т. «O'qituvchi»,2012 г.

2. Сайдаматов Э., Аманов А. и др. «Алгебра и основы математического анализа» учебное пособие для академических лицеев. Ч. II. Т. «Ilm ziyo», 2013 г.

3. Алгебра и начала анализа. Под редакцией А.Н.Колмогорова. Учебник для 10-11 классов средней школы. 1992г. — М.: Просвещение, 1991.

4. Литвиненко В.Н. Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. — М.: Просвещение, 1991.

5. Саакян С.М., Голдман А.М., Денисов Д.В. Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов. М.: Просвещение, 1990 г.

6. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В. В. и др. – М.: Наука, 1987.