ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛЛАРИ. БЕТА ВА ГАММА ФУНКЦИЯЛАР ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН АСОСИЙ НАТИЖАЛАР

Алимов Салохиддин Ҳикмат ўғли
Ўзбекистон Миллий Университети Жиззах филиали ассиценти

Аннотация: *Ушбу мақолада Эйлер интеграллари ҳақида қисқача маълумот берилган бўлиб, асосан бета ва гамма функциялар орасидаги боғланиш қаралган. Иш охирида бета ва гамма функциялар орасидаги боғланишдан келиб чиқадиган натижалар келтирилган.*

Калит сўзлар: *Эйлер интеграли, параметрга боғлиқ хосмас интеграллар, бета функция, гамма функция.*

Бизга ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

хосмас интегралнинг $a>0, b>0$ бўлганда яқинлашувчилигини,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

хосмас интегралнинг эса $a>0$ бўлганда яқинлашувчилигини олдиндан маьлум.

Равшанки, бу хосмас интеграллар a ва b ларга боғлиқ, яъни параметрга боғлиқ хосмас интеграллар бўлади.

Ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интеграл бета функция (I-тур Эйлер интеграли) дейилади ва $B(a,b)$ каби белгиланади:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad (a>0, b>0).$$

Демак, бета функция

$$\{(a,b)\in R^2 : a\in(0,+\infty), b\in(0,+\infty)\}$$

тўпламда аниқланган функция.

Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интеграл гамма функция (II-тур Эйлер интеграли) дейилади ва $\Gamma(a)$ каби белгиланади:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Демак, гамма функция $(0,+\infty)$ да аниқланган функция.

Бета ва гамма функциялар орасидаги боғланишни қуйидаги теорема ифодалайди.

Теорема. $\forall (a,b) \in \{(a,b) \in R^2 : a \in (0,+\infty), b \in (0,+\infty)\}$ учун

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (1)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

интегралда $x = (1+u)t$, $(t > 0)$ алмаштириш бажариб, s ни $a+b$ га алмаштирамиз. Натижада

$$\Gamma(a+b) = \int_0^{+\infty} (1+u)^{a+b-1} t^{a+b-1} e^{-(1+u)t} (1+u) dt$$

бўлиб,

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+u)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} t^{a+b-1} e^{-(1+u)t} dt$$

бўлади.

Энди бу тенгликнинг хар икки томонини u^{a-1} га кўпайтириб, сўнг $(0,+\infty)$ оралиқ бўйича интеграллаб топамиз:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a+b-1} e^{-(1+u)t} dt \right] u^{a-1} du$$

яъни,

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} t^{a+b-1} e^{-(1+u)t} dt \right] u^{a-1} du.$$

кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларнинг ўринларини алмаштирамиз. Натижада

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-(1+u)t} du \right] t^{a+b-1} dt$$

бўлади. Интегралда $ut = y$ алмаштириш бажариб топамиз:

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} y^{a-1} t^{b-1} e^{-t} e^{-y} dy \right] dt = \int_0^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(b) \cdot \Gamma(a).$$

Демак,

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

теорема исбот бўлди. Бу ткоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Натижа. $\forall a\in(0,1)$ учун

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (2)$$

бўлади.

Исбот. (1) тенгликда $b=1-a$ $(0<a<1)$ деб олинса, унда

$$B(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

бўлади. Маълумки,

$$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\ \Gamma(1)=1.$$

Демак,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\ (0<a<1).$$

Агар (2) формулада $a=\frac{1}{2}$ дейилса,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

бўлиши келиб чиқади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Hikmat oʻgʻli A. S. et al. BIR UMUMLASHGAN FIRIDRIXS MODELINING XOS QIYMATLARI JOYLASHISH O’RNI HAQIDA //ОБРАЗОВАНИЕ НАУКА И ИННОВАЦИОННЫЕ ИДЕИ В МИРЕ. – 2023. – Т. 20. – №. 1. – С. 77-83.

2. Hikmat oʻgʻli A. S. et al. BIR UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODEL OPERATORINING XOS QIYMATI HAQIDA //Conferencea. – 2023. – С. 147-148.

3. АДАБИЁТЛАР РУЙХАТИ:

4. Пискунов Н.С. “Дифференциал ва интеграл хисоб”, 2- том, Т.. “Укитувчи”, 1974.

5. Соатов Ё. У. “Олий математика”, 1-жилд, Т. “Укитувчи”, 1994

6. Смирнов В.И. “Курс высшей математики”. М. “Наука”, 1974, Т.2.

7. Ефимов А.В. . Золотарев Ю.Г. , Терпигорева В.М. “Математический анализ” (специальные разделы) М. “Высшая школа”, 1980, ч.2

8. Майдон назарияси элементлари Тешаев м.х Маърузал матни

9. www.ziyonet.uz

10. www.pedagog.uz