SODDA TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH

G'Iyosov Ergashboy Obidjonovich
Farg'ona "Temurbeklar maktabi" harbiy-akademik litseyi
Matematika fani o'qituvchisi

Ta'rif: Agar $a-b$ ayirma musbat son bo'lsa, a soni b sonidan katta deyiladi va bu munosabat $a>b$ shaklida yoziladi. Agar $a-b$ ayirma manfiy bo'lsa, a soni b sonidan kichik deyiladi va $a<b$ shaklida yoziladi.

Istalgan a va b sonlar uchun quyidagi uchta munosabatdan faqat bittasi o'rinli:

1. $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;
2. $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$;
3. $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.

Sonli tengsizliklar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, $a>c$ bo'ladi (tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasi).

2^0. Agar $a>b$ va $c\in R$ bo'lsa, $a+c>b+c$ bo'ladi.

3^0. Agar $a>b$ va $c>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot c$ bo'ladi.

4^0. Agar $a>b$ va $c<0$ bo'lsa, $a\cdot c<b\cdot c$ bo'ladi.

5^0. Agar $a>b$ va $c>d$ bo'lsa, $a+c>b+d$ bo'ladi.

6^0. Agar $a>b>0$ va $c>d>0$ bo'lsa, $a\cdot c>b\cdot d$ bo'ladi.

7^0. Agar $a>b>0$ va $n\in N$ bo'lsa, $a^n>b^n$ bo'ladi ($n-$toq son bo'lganda $b>0$ shart ortiqcha).

1–misol. Istalgan a, b va c sonlari uchun $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$ ekanligini isbotlang.

Yechilishi. Istalgan a, b va c sonlari uchun $\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)$ ayirmani manfiy emasligini ko'rsatamiz:

$$\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)=\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)=$$

$$=\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2.$$

Istalgan sonning kvadrati nomanfiy son bo'lgani uchun $\left(a-b\right)^2\geq 0$ va $\left(a-c\right)^2\geq 0$. Demak, $\left(2a^2+b^2+c^2\right)-2a(b+c)$ istalgan a, b va c sonlari uchun manfiy emas. Shuning uchun berilgan tengsizlik istalgan a, b va c sonlari uchun o'rinli. Jumladan, tenglik belgisi $a=b=c$ bo'lgandagina bajariladi. Δ

Tengsizlikning to'g'riligini ko'rsatish uchun uning har ikkala qismining ayirmasini musbat yoki manfiyligini aniqlash, ya'ni yuqoradagi misoldagidek bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlashga harakat qilish ayrim hollarda qiyinchiliklarni tug‘diradi. Shuning uchun tengsizliklarni isbotlashda tengsizliklarning xossalaridan foydalanish tavsiya etiladi.

2-misol. Musbat a, b va c sonlari uchun $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: Tengsizlikning chap qismida shakl almashtirish bajarib, uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6. \qquad (1)$$

Ikkita musbat son uchun o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik qiymatlar orasidagi Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2 .$$

Bu tengsizliklarni hadma-had qo‘shib, (1) tengsizlikni hosil qilamiz.

3-misol. $x,\ y>0$ bo‘lsa, $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi:

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y \quad \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq xy+x+y .$$

$$+\begin{cases} \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\geq xy, \\ \frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\geq y, \\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\geq x. \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+1\geq xy+x+y.$$

4-misol. $x>0$ bo‘lsa, $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi. $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{x}}}=2\cdot\sqrt{2^{x^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}}}=2\cdot 2^{x^{\frac{1}{6}}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

5-misol. Agar $a, b, c>0$ bo‘lsa, $\frac{3}{1/a+1/b+1/c}\leq\frac{a+b+c}{3}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: $9\leq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ tengsizlikni isbotlaymiz:

$$\begin{cases} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}. \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{9\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}}=9.$$

6-misol. Agar $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 1$ bo'lsa, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 6$ ni isbotlang.

Yechilishi: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 6\frac{1}{\sqrt[6]{ab^2c^3}} = 6$.

7-Misol. Quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\left(\frac{a^3 + 4b^4 + 3c^6}{8}\right)^8 \geq a^3b^{16}c^{18}.$$

Yechilishi: Koshi tengsizligining umumiy holiga ko'ra p ning o'rnida 3 kelyapti.

Mustaqil yechish uchun misollar:

3. Agar $x, y > 0$ bo'lsa, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ ni isbotlang.
4. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1\left(x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right).$$

3. $x, y, z > 0$ bo'lsa, $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ ni isbotlang.
4. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ni isbotlang.
5. $a, b, c > 0$ bo'lsa, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geq 16abc$ ni isbotlang.

FOYDALANILGA ADABIYOTLAR:

5. Sh. Ismailov, A. Qo'chqorov, B. Abdurahmonov tengsizliklar-i. isbotlashning klassik usullari
6. M.A.Mirzaahmedov, Sh. N. Ismailov va b. Algebra va analiz asoslari. II qism. Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 10-sinflari va o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi muasssasalari uchun darslik — T.: 2017
7. M.A.Mirzaahmedov, Sh. N. Ismailov va b. Algebra va analiz asoslari. II qism. Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 11-sinflari va o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi muasssasalari uchun darslik — T.: 2018.
8. Internet nashrlari